Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Björn Mützel

Geometrische Gruppentheorie (SS 2014)
Übungsblatt 3

Stichwörter: Graphenautomorphismen, Produktgraphen

Abgabe: Bis Mittwoch, 07.05., 15:45 Uhr im Briefkasten der Vorlesung oder in der Übungsstunde.

Aufgabe 1 (7 Punkte)
Der Farey-Graph Γ ist ein kombinatorischer Graph, der folgendermaßen definiert ist:

- Die Menge der Ecken sei $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ (dabei sei ∞ mit dem formalen Symbol $\frac{1}{0}$ identifiziert).
- Seien $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gekürzte Brüche oder $\frac{1}{0}$. Dann sind die Ecken $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ genau dann durch eine Kante verbunden, wenn $|ad-bc| = 1$.

Für $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sei $h_A : \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \to \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ gegeben durch

$$\frac{m}{n} \mapsto h_A\left(\frac{m}{n}\right) := \frac{p}{q} \text{ mit } \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

a) Zeige, dass $A \mapsto h_A$ eine Aktion von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf dem Farey-Graphen durch Graphenautomorphismen definiert.
b) Wie viele Bahnen von Ecken gibt es?
c) Wie viele Bahnen von Kanten gibt es?
d) Berechne den Stabilisator von $\frac{1}{0}$.

Aufgabe 2 (7 Punkte)
Zeige, dass jede Aktion einer endlichen Gruppe auf einem nichtleeren Baum einen globalen Fixpunkt hat. Dabei ist ein *globaler Fixpunkt* eine Ecke oder eine Kante, die von allen Elementen der Gruppe fixiert wird.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Seien $\Gamma_1 = (V_1, E_1, \delta_1, \iota_1)$ und $\Gamma_2 = (V_2, E_2, \delta_2, \iota_2)$ zwei unorientierte zusammenhängende kombinatorische Graphen mit abzählbar vielen Ecken und Kanten. Der *Produktgraph* $\Gamma_1 \times \Gamma_2 = (V, E, \delta, \iota)$ ist definiert durch:
$V = V_1 \times V_2$ und (v_1, v_2) und (w_1, w_2) sind genau dann durch eine Kante $e \in E$ verbunden, falls $v_1 = w_1$ in Γ_1 und v_2 und w_2 in Γ_2 durch eine Kante verbunden sind oder falls $v_2 = w_2$ in Γ_2 und v_1 und w_1 in Γ_1 durch eine Kante verbunden sind.

a) Zeige, dass $\mathrm{Aut}(\Gamma_1) \times \mathrm{Aut}(\Gamma_2)$ in $\mathrm{Aut}(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ eingebettet werden kann.
b) Gilt $\mathrm{Aut}(\Gamma_1 \times \Gamma_2) \cong \mathrm{Aut}(\Gamma_1) \times \mathrm{Aut}(\Gamma_2)$?
c) Für $i \in \{1,2\}$ sei G_i eine Gruppe und S_i ein Erzeugendensystem, so dass $S_i \cap S_i{}^{-1} = \emptyset$. Sei weiterhin $\Gamma_i = \Gamma_i(G_i, S_i)$ der zugehörige Cayleygraph. Sei $G_1 \times G_2$ die Produktgruppe und $(S_1 \times \{1_{G_2}\}) \cup (\{1_{G_1}\} \times S_2)$ ein Erzeugendensystem. Gilt

$$\Gamma_1 \times \Gamma_2 \cong \Gamma(G_1 \times G_2, (S_1 \times \{1_{G_2}\}) \cup (\{1_{G_1}\} \times S_2))?$$