Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Björn Mützel

Geometrische Gruppentheorie (SS 2014)

Übungsblatt 5

Stichwörter: Bäume, Kontraktionen, Überlagerungen, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Abgabe: Bis Mittwoch, 21.05., 15:45 Uhr im Briefkasten der Vorlesung oder in der Übungsstunde.

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Sei $\Gamma = (V, E, \delta, \iota)$ ein Graph und $T = (V', E', \delta, \iota)$ ein Teilbaum von Γ. Bezeichne mit der *Kontraktion* $\Gamma_1 := \Gamma/T$ von Γ nach T den Graphen Γ_1 mit der Eckenmenge V_1 und der Kantenmenge E_1, der wie folgt entsteht:

- $V_1 := V/\sim$, wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation ist, die erzeugt wird von: $v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1, v_2 \in V'$.
- $E_1 := E \backslash E'$.

Seien δ_1 und ι_1 die natürlichen, von δ und ι induzierten Abbildungen, die durch Einschränken auf E_1 und Projizieren von V auf V_1 entstehen.
Sei v_0 die Ecke in Γ_1, die der Äquivalenzklasse der Ecken aus V' entspricht. Betrachte die Abbildung h definiert durch

$$h : \Gamma^{geom} \to \Gamma_1^{geom}, (t, e) \mapsto h(t, e) := \begin{cases} (t, e), & \text{falls } e \notin E', \\ v_0, & \text{falls } e \in E'. \end{cases}$$

Zeige: h ist eine Homotopieäquivalenz.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Zeige: Eine unverzweigte Überlagerung der geometrischen Realisierung eines nichtleeren Graphen ist auf natürliche Weise selbst wieder ein Graph, das heißt: Ist $\Gamma = (V, E, \delta, \iota)$ ein Graph und $p : Y \to \Gamma^{geom}$ eine unverzweigte Überlagerung, dann gilt:

i) Es gibt einen Graphen $\hat{\Gamma}$, einen Graphenmorphismus $q : \hat{\Gamma} \to \Gamma$ und einen Homöomorphismus $f : \hat{\Gamma}^{geom} \to Y$ mit $p \circ f = q^{geom}$.
ii) $(\hat{\Gamma}, q)$ ist bis auf Isomorphie eindeutig.

Aufgabe 3 (8 Punkte) (*Fundamentalbereich für die Aktion von $PSL_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$ - Teil 1*)
Sei $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ die Gruppe, die man erhält, wenn man $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $-A$ identifiziert.

a) Sei $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ die obere Halbebene in $\mathbb{C}$. Sei Γ die Gruppe der Abbildungen

$$\Gamma := \{f_A : \mathbb{H} \to \mathbb{H} \mid f_A(z) = \frac{a \cdot z + c}{b \cdot z + d}, \quad \text{wobei} \quad A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\}.$$

Zeige, dass $\phi(A)(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$ für alle $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ und dass $\phi : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \to \Gamma, A \mapsto \phi(A) := f_A$ ein Gruppenisomorphismus ist.

b) Sei $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimme jeweils einen Fundamentalbereich F_T von $\phi(\langle T \rangle)$ und F_S von $\phi(\langle S \rangle)$. Was sind $\mathbb{H}/\langle T \rangle$ und $\mathbb{H}/\langle S \rangle$ topologisch ?

c) Zeige: Für jedes $z \in \mathbb{H}$ existiert $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, so dass $\mathrm{Im}(\phi(A)(z))$ maximal ist.

d) Bestimme einen Fundamentalbereich $F_{T,S}$ von $\phi(\langle T, S \rangle)$.