Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Björn Mützel

Geometrische Gruppentheorie (SS 2014)
Übungsblatt 6

Stichwörter: Präsentationen, Normalform für Produkte freier Gruppen, Amalgame.

Abgabe: Bis Mittwoch, 28.05., 15:45 Uhr im Briefkasten der Vorlesung oder in der Übungsstunde.

Aufgabe 1 (5 Punkte) (*Fundamentalbereich für die Aktion von $PSL_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$ - Teil 2*)
Gegeben sei die Aktion

$$A \mapsto f_A, \quad \text{so dass} \quad f_A(z) := \frac{a \cdot z + c}{b \cdot z + d}, \quad \text{für} \quad A = \left[\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right] \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$$

von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$ aus Blatt 5, **Aufgabe 3**. Bestimme einen Fundamentalbereich für diese Aktion.

Hinweis: Verwende die Resultate von Blatt 5, **Aufgabe 3**.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Zeichne orientierte und beschriftete Cayleygraphen der Gruppen, die durch folgende Präsentationen gegeben sind. Um welche Gruppen handelt es sich ?

a) $G_1 = \langle x, y \mid x^4, x^2 y^{-2}, y^{-1} xyx \rangle$.
b) $G_2 = \langle x, y \mid x^2 = y^3, xyx = yxy \rangle$.

Aufgabe 3 (5 Punkte) *(Normalform für freie Produkte)*
Seien $G = A * B$ das freie Produkt der Gruppen A und B sowie $\iota_1 : A \to G$ und $\iota_2 : B \to G$ die zugehörigen natürlichen Einbettungen. Sei

$$W := \{(g_1, g_2, \ldots, g_n) \mid g_i \in A \dot{\cup} B \setminus \{1_A, 1_B\} \text{ und } g_i \in A \Leftrightarrow g_{i+1} \in B\}$$

die Menge der *reduzierten Wörter* in $A \cup B$. Zeige:

a) Ist $(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in W$, dann gilt in G: $g_1 \cdot g_2 \cdots g_n \neq 1_G$.
b) Jedes Element $g \in G$ lässt sich eindeutig schreiben als $g = g_1 \cdot g_2 \cdots g_n$ mit $(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in W$.

   Hinweis: Betrachte die Abbildung $\beta : W \to G, (g_1, g_2, \ldots, g_n) \mapsto \beta(g_1, g_2, \ldots, g_n) := g_1 \cdot g_2 \cdots g_n$. Finde Aktionen von A und B auf W, so dass gilt:

   $$\beta(g \bullet (g_1, g_2, \ldots, g_n)) = g \cdot \beta(g_1, g_2, \ldots, g_n) \quad \text{für} \quad g \in A \text{ bzw. } g \in B.$$

   Setze die beiden Aktionen zu einer Aktion α von G auf W zusammen und erhalte so eine Abbildung $G \to W, g \mapsto g \bullet \varepsilon$, wobei $\varepsilon \in W$ die leere Folge ist.

c) Verallgemeinere die Aussagen von a) und b) auf endlich viele Gruppen $(A_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Gegeben sei ein beliebiger injektiver Homomorphismus $\varphi_1 : \mathbb{Z} \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q})$ sowie der Homomorphismus $\varphi_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, z \mapsto \varphi_2(z) := z \mod 2$. Zeige, dass

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q}) *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0\}.$$