Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Björn Mützel

Geometrische Gruppentheorie (SS 2014)
Doppel-Übungsblatt 7

Stichwörter: Freie Produkte, Präsentationen, Ping-Pong-Lemma, Zopfgruppen, Quasi-Isometrien.

Abgabe: Bis **Mittwoch, 11.06.**, 15:45 Uhr im Briefkasten der Vorlesung oder in der Übungsstunde.

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Sei (X,d) ein metrischer Raum. (X,d) heißt *Y-Raum*, wenn für drei beliebige Punkte p,q,r Geodätische γ_{pq}, γ_{pr}, γ_{qr} existieren, die die jeweiligen Punkte verbinden, so dass

$$\gamma_{pq} \cap \gamma_{pr} \cap \gamma_{qr} = \{x\} \text{ für ein } x \in X.$$

Zeige, dass die geometrische Realisierung eines Baums ein Y-Raum ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte) *(Ping-Pong-Lemma)*
Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Für $k \geq 2$, seien $H_1, H_2, \ldots, H_k$ nicht-triviale Untergruppen von G, so dass mindestens eine dieser Untergruppen mehr als zwei Elemente enthält.
- X enthält k paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen $X_1, X_2, \ldots, X_k$, für die gilt: Für alle $i \neq j$ und alle $h \in H_i \backslash \{1\}$ gilt: $h(X_j) \subseteq X_i$.

Zeige, dass:

$$\langle H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_k \rangle = H_1 * H_2 * \ldots * H_k.$$

Aufgabe 3 (7 Punkte) (*Präsentation von $PSL_2(\mathbb{Z})$*)

a) Finde eine Präsentation von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und zeichne den zugehörigen Cayleygraphen.

b) Finde ein Element P der Ordnung 3 in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, so dass $P \bullet -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, sowie ein Element S der Ordnung 2, so dass $S \bullet i = i$. Zeige unter Verwendung der Resultate aus Blatt 6, **Aufgabe 1**, dass $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \langle P, S \rangle$.

c) Zeige mit Hilfe des Ping-Pong-Lemmas, dass $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

   Hinweis: Sei $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \partial\mathbb{H}$. Zeige, dass $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ auf X operiert und betrachte $\langle P \rangle \bullet 0$ und $\langle S \rangle \bullet 0$.

d) Finde eine Einbettung des Cayleygraphen von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ in $\mathbb{H}$ mit Hilfe des Fundamentalbereichs $F_{T,S}$ aus Blatt 6, **Aufgabe 1**.

Bitte wenden!

Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Björn Mützel

Aufgabe 4 (7 Punkte)
Sei $G = \langle a, b \mid aba = bab \rangle$.

a) Zeige, dass es einen Homomorphismus $\varphi : G \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ gibt mit $\varphi(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\varphi(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Mit den Bezeichnungen aus a) sei $\omega = (aba)^2 \in G$. Zeige, dass $\omega \in \mathrm{Kern}(\varphi)$ und $\omega \in Z(G) := \{z \in G \mid z \cdot g = g \cdot z \ \text{ für alle } \ g \in G\}$.

c) Zeige, dass sogar $\mathrm{Kern}(\varphi) = \langle\langle \omega \rangle\rangle$.

Hinweis: Konstruiere eine inverse Abbildung zu φ von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ nach $G/\langle\langle \omega \rangle\rangle$ unter Verwendung der Präsentation aus **Aufgabe 3**.

Aufgabe 5 (5 Punkte)
Sei B_n die Zopfgruppe mit n Strängen. Ein Zopf heißt *positiv*, wenn er als Wort in den s_i geschrieben werden kann (ohne Verwendung der s_i^{-1}) und ein positiver Zopf heißt *nichtwiederholend*, wenn sich zwei Stränge höchstens einmal kreuzen.
Sei Z_n die Menge der positiven nicht wiederholenden Zöpfe und $p : B_n \to S_n$ die Abbildung, die jedem Zopf die zugehörige Permutation zuordnet.

a) Zeichne alle Elemente von Z_3.

b) Zeige, dass $p|_{Z_n} : Z_n \to S_n$ bijektiv ist.

Aufgabe 6 (5 Punkte)
Seien $P = \langle X \mid R \rangle$ und $P' = \langle X' \mid R' \rangle$ zwei endliche Präsentationen der Gruppe G. Zeige: Ist das Wortproblem für P entscheidbar, so auch für P'.

Aufgabe 7 (6 Punkte)
Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume. Für zwei Abbildungen $f, g : X \to Y$ sei die Relation $\sim$ gegeben durch:

$$f \sim g \Leftrightarrow \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)) < \infty.$$

a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Sei $\mathrm{QI}(X) := \mathrm{QI}(X, d_X)$ die Menge der Äquivalenzklassen (bezüglich $\sim$) von Quasi-Isometrien $X \to X$. Zeige, dass $\mathrm{QI}(X)$ mit der durch die Hintereinanderausführung induzierten Verknüpfung eine Gruppe ist und dass eine Quasi-Isometrie $h : X \to Y$ einen Gruppenisomorphismus $\mathrm{QI}(X) \to \mathrm{QI}(Y)$ induziert.

c) Zeige, dass $\mathrm{QI}(\mathbb{R}, |\cdot|)$ überabzählbar ist.