Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Björn Mützel

Geometrische Gruppentheorie (SS 2014)
Übungsblatt 8

Stichwörter: Dehnpräsentation, mediane Y-Räume, Y-Algebren.

Abgabe: Bis **Dienstag**, 17.06., 15:45 Uhr im Briefkasten der Vorlesung oder in der Übungsstunde.

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Zeige oder widerlege: $\mathbb{Z}^2$ hat eine Dehnpräsentation.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Seien G und H endlich erzeugte Gruppen und $\phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass ϕ genau dann eine Quasi-Isometrie (bezüglich gewählter Wortmetriken) induziert, wenn Kern ϕ und die Menge der Nebenklassen $H/\text{Bild}\ \phi$ endlich sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei (X,d) ein geodätischer Raum. Wir nennen (X,d) einen *medianen Y-Raum*, falls für drei beliebige Punkte p,q,r Geodätische zwischen je zwei dieser Punkte existieren, die sich alle in genau einem Punkt schneiden, und falls dieser Schnittpunkt für jedes solche Triplett $(\gamma_{pq}, \gamma_{pr}, \gamma_{rq})$ von Geodätischen immer derselbe ist.
Finde einen Y-Raum, der kein medianer Y-Raum ist, und einen medianen Y-Raum, der kein Baum ist.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Eine *Y-Algebra* ist eine Menge X zusammen mit einer sogenannten *Intervallabbildung*

$$I : X \times X \to \mathscr{P}(X), (x,y) \mapsto I(x,y) = [x,y],$$

die Punktepaare auf Teilmengen von X abbildet, so dass für alle $x,y,z \in X$ gilt:

i) $[x,x] = \{x\}$.
ii) Falls $z \in [x,y]$, dann gilt $[x,z] \subseteq [x,y]$.
iii) $[x,y],[y,z],[z,x]$ haben genau einen gemeinsamen Punkt $m(x,y,z)$.

Eine Y-Algebra ist *diskret*, falls jedes Intervall $[x,y]$ nur aus endlich vielen Punkten besteht.

Beweise die folgenden Aussagen:

a) Zeige: Ist (X,d) ein medianer Y-Raum, dann ist X eine Y-Algebra.
b) Zeige: Die Potenzmenge $\mathscr{P}(M)$ einer Menge M mit der Abbildung $I : (A,B) \mapsto I(A,B) := \{C \subset M \mid A \cap B \subseteq C \subseteq A \cup B\}$ ist eine Y-Algebra.
c) Jede diskrete Y-Algebra ist ein *Raum mit Wänden*, das heißt:
Sei X eine Menge. Eine *Wand* ist eine Zerlegung von X in zwei disjunkte Teilmengen, die *Halbräume* genannt werden. X ist ein *Raum mit Wänden*, wenn er mit einer Menge $\mathscr{W}$ von Wänden versehen ist, so dass gilt:
    i) $\{X, \emptyset\} \in \mathscr{W}$.
    ii) Je zwei unterschiedliche Punkte in X werden durch eine endliche, von null verschiedene Anzahl von Wänden voneinander getrennt. Dabei trennt eine Wand $w \in \mathscr{W}$ zwei unterschiedliche Punkte $x,y \in X$, wenn x in einem der beiden, durch w definierten Halbräume liegt und y in dem anderen.