Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Björn Mützel

Geometrische Gruppentheorie (SS 2014)
Übungsblatt 9

Stichwörter: Satz von Milnor-Schwartz, eigentlich diskontinuierliche Aktionen, Fixpunktmengen.

Abgabe: Bis Mittwoch, 25.06., 15:45 Uhr im Briefkasten der Vorlesung oder in der Übungsstunde.

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Sei X ein topologischer Raum und G eine Gruppe versehen mit der diskreten Topologie, sowie $\phi : G \to \text{Homöo}(X)$ eine Gruppenaktion.

i) Die Abbildung $\phi' : G \times X \to X \times X, (g,x) \mapsto \phi'(g,x) := (g \bullet x, x)$ ist *eigentlich*, das heißt: Ist $K \subset X \times X$ kompakt, so ist $\phi'^{-1}(K)$ kompakt.
ii) G operiert *eigentlich diskontinuierlich* auf X, falls für alle $x, y \in X$ existieren Umgebungen U_x von x und U_y von y, so dass $\#\{g \in G \mid g \bullet U_x \cap U_y \neq \emptyset\} < \infty$.

Zeige: Ist X lokalkompakt und Hausdorffsch, dann stimmen diese Definitionen untereinander, sowie mit der Definition einer eigentlich diskontinuierlichen Aktion aus der Vorlesung überein.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Es sei X ein lokalkompakter, metrischer Raum und $\rho : G \to \text{Isom}(X)$ eine Gruppenaktion durch Isometrien.

a) Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
   i) Die Aktion von ρ ist eigentlich diskontinuierlich.
   ii) Für alle $x \in X$ hat die Bahn $G \bullet x := \{g \bullet x | g \in G\}$ keinen Häufungspunkt in X und es gilt: $\#\text{Stab}_G(x) < \infty$.
b) Sei G die Gruppe der Abbildungen $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ gegeben durch

$$f_n : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, (x,y) \mapsto f_n(x,y) := (2^n \cdot x, 2^{-n} \cdot y),$$

die auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ via Homöomorphismen operiert. Zeige, dass die Aktion von G die Bedingung ii) aus Teil a) erfüllt, aber nicht eigentlich diskontinuierlich operiert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien A und $B \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$. Zeige:

a) Ist $A \cdot B = B \cdot A$, so bildet A die Fixpunktmenge $\text{Fix}(B) \subset \mathbb{H}$ von B auf sich ab.
b) Sei $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimme alle $A \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$, so dass $A \cdot T = T \cdot A$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Benenne für jede der folgenden Gruppenaktionen eine Voraussetzung des Satzes von Milnor-Schwartz, die erfüllt ist, und eine, die nicht erfüllt ist.

a) $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert auf $\mathbb{R}^2$ durch Matrixmultiplikation.
b) $\mathbb{Z}$ operiert auf $X := \{(r^3, s) | r, s \in \mathbb{Z}\}$ (mit der durch die Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$ induzierten Metrik) durch

$$\phi : \mathbb{Z} \times X \to X, (n, (r^3, s)) \mapsto \phi(n, (r^3, s)) := (r^3, s + n).$$