Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Björn Mützel

Geometrische Gruppentheorie (SS 2014)
Übungsblatt 10

Stichwörter: Geodätische und Isometrien in $\mathbb{H}$, Fuchssche Gruppen.

Abgabe: Bis Mittwoch, 02.07., 15:45 Uhr im Briefkasten der Vorlesung oder in der Übungsstunde.

Aufgabe 1 (7 Punkte)

a) Zeige: Für $p,q \in i\mathbb{R}$ gilt: $\cosh(d(p,q)) = 1 + \frac{\|p-q\|_2^2}{2\mathrm{Im}(p)\cdot\mathrm{Im}(q)}$.

b) Unter Verwendung von Teil a), zeige, dass für alle $p,q \in \mathbb{H}$ gilt: $\cosh(d(p,q)) = 1 + \frac{\|p-q\|_2^2}{2\mathrm{Im}(p)\cdot\mathrm{Im}(q)}$.

c) Berechne $\cosh(d(i, A \bullet i))$ für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Hinweis: Für Teil b) ist es nützlich zu verwenden, dass $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ von den folgenden Matrizen erzeugt wird:

$$T_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R},\ S_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ und } R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \alpha \in (0, 2\pi].$$

Aufgabe 2 (7 Punkte)
Zwei Elemente $A, C \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sind *konjugiert*, falls ein $B \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ existiert, so dass $BAB^{-1} = C$. Beweise die folgenden Aussagen:

a) Jedes Element $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})\backslash\{[\mathrm{Id}_2]\}$ ist zu genau einer der folgenden Matrizen konjugiert:

$$S_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \lambda \in (1, \infty), \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T^{-1} \quad \text{oder} \quad R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \alpha \in (0, \pi).$$

Im ersten Fall heißt A *hyperbolisch*, im zweiten Fall *parabolisch* und im dritten Fall *elliptisch*.

b) Ist $BAB^{-1} = C$, so gilt für die Fixpunktmengen $\mathrm{Fix}(A), \mathrm{Fix}(C) \subset \mathbb{H}$: $\mathrm{Fix}(A) = B^{-1} \bullet \mathrm{Fix}(C)$.

c) Für $A, B \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})\backslash\{[\mathrm{Id}_2]\}$ gilt: A und B haben genau dann die gleiche Fixpunktmenge, wenn sie kommutieren.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) Sei Γ eine Untergruppe von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen.
   i) Γ operiert eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{H}$.
   ii) Γ ist diskret als Teilmenge von $\mathbb{R}^4$, das heißt, $\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma\}$ ist diskret in $\mathbb{R}^4$, wobei $\mathbb{R}^4$ mit der Standardtopologie versehen ist, die von der Euklidischen Metrik induziert wird.

   Tipp: Verwende das Ergebnis von **Aufgabe 1**, Teil c).

b) Erfüllt $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ die Voraussetzungen des Satzes von Milnor und Schwartz?