Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Björn Mützel

Geometrische Gruppentheorie (SS 2014)
Übungsblatt 11

Stichwörter: Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene, geodätische Strahlen, Raum der Enden.

Abgabe: Bis Mittwoch, 09.07., 15:45 Uhr im Briefkasten der Vorlesung oder in der Übungsstunde.

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Für $z \in \mathbb{H}$ sei $f(z) := \frac{z-i}{-iz+1}$.

a) Sei $z \in \mathbb{H}$. Zeige, dass $\frac{2|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} = \frac{1}{\mathrm{Im}(z)}$ gilt.

b) Zeige, dass $d_{\mathbb{D}}$ durch die Metrik $\frac{2|dz|}{1-|z|^2}$ induziert wird. Genauer: Die hyperbolische Länge eines differenzierbaren Weges $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$ sei als $\ell(\gamma) := \int_0^1 \frac{2|\frac{d\gamma(t)}{dt}|}{1-|\gamma(t)|^2} dt$ definiert. Dann gilt $d_{\mathbb{D}}(z,w) = \inf \ell(\gamma)$, wobei das Infimum über alle differenzierbaren Wege von z nach w gebildet wird.

c) Zeige, dass die Summe der Innenwinkel eines hyperbolischen Dreiecks kleiner als π ist.

Hinweis: Hier darf verwendet werden, dass der hyperbolische Winkel zwischen zwei Kurven in $\mathbb{H}$ oder $\mathbb{D}$ dem Euklidischen Winkel zwischen diesen beiden Kurven entspricht.

d) Zeige, dass hyperbolische Kreise in $\mathbb{H}$ Euklidische Kreise sind.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Ein *reguläres* hyperbolisches n-gon ist ein n-Eck in der hyperbolischen Ebene, so dass alle Kanten geodätische Segmente gleicher Länge sind und die Innnenwinkel in jeder Ecke gleich groß sind.
Sei α der Innenwinkel einer Ecke eines regulären hyperbolischen Achtecks. Für welche α existiert ein solches Achteck?

Aufgabe 3 (5 Punkte)

(a) Zeige, dass die logarithmische Spirale

$$L : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto L(t) := (t \cdot \sin(\ln(1+t)), t \cdot \cos(\ln(1+t)))$$

ein quasi-geodätischer Strahl ist, das heißt eine quasi-isometrische Einbettung bezüglich den Standardmetriken auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$.

(b) Zeige, dass die logarithmische Spirale von keinem geodätischen Strahl im $\mathbb{R}^2$ endlichen Abstand hat.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Die KVV-Metrik ist die Metrik auf $\mathbb{R}^2$ die folgendermaßen definiert ist:

$$d_{\mathrm{KVV}}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \begin{cases} |y_1| + |x_2 - x_1| + |y_2| & \text{falls } x_1 \neq x_2 \\ |y_2 - y_1| & \text{falls } x_1 = x_2 \end{cases}, \quad \text{für alle } (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Bestimme die Enden der beiden metrischen Räume $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{KVV}})$ und $(\mathbb{R} \times [-1,1), d_{\mathrm{KVV}})$.