Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Björn Mützel

Geometrische Gruppentheorie (SS 2014)
Übungsblatt 12

Stichwörter: Isometriegruppe der hyperbolischen Ebene, Raum der Enden.

Abgabe: Bis Mittwoch, 16.07., 15:45 Uhr im Briefkasten der Vorlesung oder in der Übungsstunde.

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Zeige, dass $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ eine Untergruppe von Index 2 in $\mathrm{Isom}(\mathbb{H})$ ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Sei (X,d) ein eigentlicher geodätischer Raum. Für ein festes $v_0 \in X$ und ein $e \in \mathrm{Ends}(X)$ ist

$$\mathcal{V}_n(e) = \{e' \in \mathrm{Ends}(X) \mid e \text{ und } e' \text{ liegen in der selben Zusammenhangskomponente von } X \backslash B_n(v_0)\}.$$

Für festes n ist $\mathrm{Ends}(X)$ die disjunkte Vereinigung der $(\mathcal{V}_n(e))_e$. Zeige:

i) $\mathrm{Ends}(X)$ ist Hausdorffsch.
ii) $\mathrm{Ends}(X)$ ist total unzusammenhängend, das heißt jede Zusammenhangskomponente besteht aus genau einem Punkt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Sei Γ ein zusammenhängender Graph versehen mit der Graphenmetrik d_Γ.
Zeige: Hat jede Ecke endliche Valenz so ist $\mathrm{Ends}(\Gamma)$ kompakt.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Sei $G = \langle S \rangle$ eine endlich erzeugte Gruppe.
Zeige: Wenn G genau zwei Enden hat, dann enthält G eine Untergruppe U, so dass die Menge der Nebenklassen G/U endlich und U isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.

Hinweis: Wähle einen Ball $B_R(1_G)$ um das Einselement in (G,d_S), der die beiden Enden trennt. Dabei ist d_S die Wortmetrik zu S. Finde ein Gruppenelement $\gamma \in (G,d_S) \setminus B_R(1_G)$, das trivial auf der Menge der Enden von (G,d_S) operiert, und zeige, dass γ unendliche Ordnung hat. Betrachte hierzu $\gamma^n(r)$ für einen geodätischen Strahl $r \subset (G,d_S) \setminus B_R(1_G)$, der bei γ anfängt.