Skript zur Vorlesung
Geometrische Gruppentheorie

Gabriela Weitze-Schmithüsen

Dies sind die leider noch nicht vollständigen Notizen zu der Vorlesung Geometrische Gruppentheorie, die ich mit leichten Variationen im Wintersemester 2007/2008, im Wintersemester 2009/2010 und schließlich im Sommersemester 2014 an der Universität Karlsruhe bzw. am KIT gehalten habe.

Kapitel I

Cayley-Graphen

In diesem Kapitel führen wir Cayleygraphen ein. Dazu basteln wir für jede endlich erzeugte Gruppen G und jedes Erzeugendensystem S einen Graphen und damit einen metrischen Raum, auf dem die Gruppe treu operiert. Wir untersuchen, welche Eigenschaften der Graph hat und lernen mit dem Satz von Sabidussi ein Kriterium kennen, das charakterisiert, wann ein Graph ein Cayleygraph ist.

1 Graphen

Ziele dieses Abschnitts:

- Grundbegriffe zu Graphen
- Einführung der Kategorie $\underline{\text{Graph}}$

Wir beginnen mit einer kleinen Einführung zu Graphen, in der wir die wichtigsten Grundbegriffe bereit stellen. Wir betrachten zunächst ungerichtete Graphen. Um die Möglichkeit zu haben, später jeder geometrischen Kante des Graphen eine Richtung zu geben, wird jede geometrische Kante als Paar zueinander gegensätzlich orientierter Kanten beschrieben. Eine Orientierung des Graphen erhält man dann, indem man aus jedem solchen Paar eine Kante auswählt. Ein gerichteter Graph ist dann ein ungerichteter Graph mit der Wahl einer solchen Orientierung.

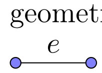
Definition 1.1. (Graphen)

i) Ein *Graph* Γ besteht aus einem Quadrupel $\Gamma = (V, E, \delta, \iota)$ bestehend aus:

- einer Menge V (*Ecken* oder *Vertices*)
- einer Menge E (*Kantenmenge* oder *Edges*) mit $E \cap V = \emptyset$
- einer Abbildung $\delta = (o, t) : E \to V \times V, e \mapsto (o(e), t(e))$ (*Randabbildung*) und
- einer Abbildung $\iota : E \to E, e \mapsto \overline{e}$ (*Gegenkante*),

für die gilt:

$$\forall e \in E : \overline{\overline{e}} = e,\ \overline{e} \neq e \text{ und } o(e) = t(\overline{e})$$

ii) Für $e \in E$ heißt $\{e, \overline{e}\}$ eine *geometrische Kante*, $o(e)$ *Anfangspunkt* von e und $t(e)$ *Endpunkt* von e.
Wir verwenden folgende Konvention zur bildlichen Darstellung von geometrischen Kanten:


für die geometrische Kante $\{e, \overline{e}\}$.

iii) Eine *Orientierung* von Γ ist eine Teilmenge E_+ von E mit

$$E = \mathrm{E}_+ \cup \overline{\mathrm{E}_+} \text{ und } \mathrm{E}_+ \cap \overline{\mathrm{E}_+} = \emptyset,$$

wobei $\overline{\mathrm{E}_+} = \iota(\mathrm{E}_+)$ ist, also genau die Gegenkanten der Kanten in E_+ enthält.

iv) Das Tripel $\Gamma_+ = (V, \mathrm{E}_+, \delta_+)$ heißt dann *gerichteter Graph*, wobei $\delta_+ = \delta_+ |_{\mathrm{E}_+}$. Der gerichtete Graph Γ_+ und der dazugehörige ungerichtete Graph Γ sind durch die Daten V, E_+ und δ_+ vollständig bestimmt.

v) Eine Abbildung $E \to M$ heißt *Kantenbeschriftung*, eine Abbildung $V \to M$ heißt *Eckenbeschriftung mit Elementen in M.*

Als erstes Beispiel wollen wir Cayleygraphen betrachten und führen damit bereits den Hauptdarsteller des ersten Kapitels ein.

Definition 1.2. Sei G eine Gruppe und $S \subseteq G$. Γ sei der gerichtete Graph definiert durch die folgenden Daten:

- $V = G$
- $\mathrm{E}_+ = G \times S$
- $\delta_+ : G \times S \to G \times G, (g, s) \mapsto (g, g \cdot s)$

$\Gamma = \Gamma(G, S)$ heißt dann *verallgemeinerter Cayleygraph* von G bezüglich S.

Neben der Orientierung trägt der Cayleygraph als weitere Zusatzstruktur eine natürliche Kantenbewertung.

Bemerkung 1.3. Der verallgemeinerte Cayleygraph $\Gamma(G, S)$ trägt die *natürliche Kantenbewertung mit Elementen in* $S \cup S^{-1}$, wobei $S^{-1} := \{s \in G | s^{-1} \in S\}$:

$$w : E \to S \cup S^{-1}, \begin{array}{l} e \mapsto s, \text{ falls } e = (g, s) \in \mathrm{E}_+ \\ e \mapsto s^{-1}, \text{ falls } \overline{e} = (g, s) \in \mathrm{E}_+ \end{array}$$

Nun kehren wir zunächst zurück zu allgemeinen Graphen. Es folgen zunächst drei handfeste Beispiele.

Beispiel 1.4.

i) Die Rose mit n Blättern für $n \in \mathbb{N}$: $R_n = (V, E, \delta, \iota)$, wobei: $V = \{0\}$, $E = \{e_1, \overline{e_1}, \ldots, e_n, \overline{e_n}\}$ und $\forall e \in E : \delta(e) = (0, 0)$. Dies ist also ein endlicher Graph mit einer Ecke und n geometrischen Kanten, die alle Schleifen sind.

ii) Sei Γ_{hex} der duale Graph zur Triangulierung der Ebene durch gleichseitige kongruente Dreiecke. Γ_{hex} ist also ein unendlicher kombinatorischer Graph, bei dem jede Ecke drei Nachbarn hat.

iii) Der Graph Circ_n: $\mathrm{Circ}_n = (V, E, \delta, \iota)$ mit $V = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ und $E = \{e_1, \overline{e_1}, \ldots, e_n, \overline{e_n}\}$, und jede Ecke hat genau zwei Nachbarn.

Q1: Welche dieser Graphen können wohl Cayley-Graphen sein? Diese Überlegung ist ein Vorgriff auf Abschnitt 2, in dem wir erste Eigenschaften von Cayleygraphen untersuchen werden. Dort findet sich auch die Antwort.

Im Folgenden führen wir einige weitere Notationen ein. Insbesondere definieren wir kombinatorische Graphen, das sind Graphen ohne Schleifen und ohne Doppelkanten, bei denen die Kanten somit bereits vollständig durch ihre Randpunkte bestimmt sind.

Definition 1.5. Sei $\Gamma = (V, E, \delta, \iota)$ ein Graph.

i) v_1 und v_2 aus V heißen *benachbart*
:$\Leftrightarrow \exists\, e \in E :\ o(e) = v_1$ und $t(e) = v$.

ii) Zwei geometrische Kanten $\{e_1, \overline{e_1}\}$ und $\{e_2, \overline{e_2}\}$ heißen *benachbart*
:$\Leftrightarrow |\{o(e_1), t(e_1)\} \cap \{o(e_2), t(e_2)\}| = 1$.

iii) $e \in E$ heißt *Schleife* $:\Leftrightarrow o(e) = t(e)$.
$e_1 \in E$ heißt *Doppelkante*
$:\Leftrightarrow \exists\, e_2 \in E$ mit $e_1 \neq e_2$ so dass $o(e_1) = o(e_2)$ und $t(e_1) = t(e_2)$.
Γ heißt *kombinatorischer Graph*
$:\Leftrightarrow \Gamma$ hat keine Doppelkanten und keine Schleifen.

Q2: Unter welchen Bedingungen an G und S ist der verallgemeinerte Cayleygraph $\Gamma(G,S)$ kombinatorisch? Dies ist wiederum ein kleiner Vorgriff auf Abschnitt 2, wo sich die Antwort darauf findet.

Im Folgenden führen wir mit der Valenz einer Ecke ein wichtiges kombinatorisches Datum für Graphen ein.

Definition 1.6. Sei $\Gamma = (V, E, \lambda, \iota)$ wieder ein Graph und $x \in V$.

i) $E_x := \{e \in E | o(e) = x\}$ heißt *Stern von x in* Γ.

ii) $\mathrm{val}(x) := |\{E_x\}|$ heißt *Valenz* oder *Ordnung von x*.

iii) Für $k \in \mathbb{N}$ heißt Γ *k-regulär*, falls für alle $x \in V$ gilt: $\mathrm{val}(x) = k$.

Nun fühlen wir uns hoffentlich mit Graphen soweit schon ganz wohl und möchten als nächsten Schritt auch Abbildungen zwischen Graphen betrachten können. Diese sollen die Struktur des Graphen erhalten, was uns zu der Definition von Morphismus führt.

Definition 1.7. Seien $\Gamma_1 = (V_1, E_1, \delta_1, \iota_1)$ und $\Gamma_2 = (V_2, E_2, \delta_2, \iota_2)$ Graphen.

i) Ein *Morphismus* $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ ist ein Paar $f = (f_E, f_V)$ von Abbildungen $f_V : V_1 \to V_2$ und $f_E : E_1 \to E_2$, so dass gilt:

- $\delta_2 \circ f_E = (f_V, f_V) \circ \delta_1$ und
- $\iota_2 \circ f_E = f_E \circ \iota_1$

Das heißt also:

$$\forall e \in E_1 : \quad \begin{aligned} &o_2(f_E(e)) = f_V(o_1(e)),\ t_2(f_E(e)) = f_V(t_1(e)) \text{ und} \\ &f_E(\iota_1(e)) = \iota_2(f_E(e)). \end{aligned}$$

ii) $\mathrm{Mor}(\Gamma_1, \Gamma_2) := \{f : \Gamma_1 \to \Gamma_2 |\ f \text{ ist Morphismus}\}$ ist die Menge der Morphismen von Γ_1 nach Γ_2.
Für $f = (f_E, f_V) \in \mathrm{Mor}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ und $g = (g_V, g_E) \in \mathrm{Mor}(\Gamma_2, \Gamma_3)$ sei

$$g \circ f := (g_V \circ f_V, g_E \circ f_E).$$

Weiterhin sei für den Graphen $\Gamma = (V, E, \delta, \iota)$

$$\mathrm{id}_\Gamma := (\mathrm{id}_V, \mathrm{id}_E)$$

iii) $f \in \mathrm{Mor}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ heißt *Isomorphismus*, falls es einen Morphismus $g \in \mathrm{Mor}(\Gamma_2, \Gamma_1)$ gibt, mit $f \circ g = \mathrm{id}_{\Gamma_2}$ und $g \circ f = \mathrm{id}_{\Gamma_1}$. Für einen Graphen Γ definieren wir $\mathrm{Aut}(\Gamma) := \{f \in \mathrm{Mor}(\Gamma, \Gamma) | \; f \text{ ist Isomorphismus}\}$.

Wir entdecken hier das Grundprinzip von Kategorien wieder, die uns überall in der Mathematik als Grundstrukturen begegnen. Im Folgenden erinnern wir an diesen grundlegenden Begriff.

Definition 1.8. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus:

- einer Klasse $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ von *Objekten*
- zu jedem $C_1, C_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ einer Klasse $\mathrm{Mor}(C_1, C_2)$ von *Morphismen*
- zu je drei Objekten C_1, C_2 und C_3 eine *Kompositionsabbildung*:

$$\circ : \mathrm{Mor}(C_1, C_2) \times \mathrm{Mor}(C_2, C_3) \to \mathrm{Mor}(C_1, C_3), (f, g) \mapsto g \circ f$$

so dass gilt:

i) Assoziativität: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ für alle Morphismen f, g und h, für die die Kompositionen wohldefiniert sind.

ii) Für jedes Objekt C gibt es eine *Identität* id_C, so dass gilt:

$$\forall f \in \mathrm{Mor}(C_1, C_2) : \mathrm{id}_{C_2} \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_{C_1}$$

$\mathcal{C}$ heißt *kleine Kategorie*, falls für alle C_1, C_2 in $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ gilt: $\mathrm{Mor}(C_1, C_2)$ ist eine Menge.

Beispiel 1.9. Beispiele für Kategorien, die wir aus dem täglichen Leben kennen:

- die Kategorie $\underline{\mathrm{Set}}$ der Mengen mit Abbildungen als Morphismen
- die Kategorie $\underline{\mathrm{Grp}}$ der Gruppen mit Gruppenhomomorphismen
- die Kategorie $\underline{\mathrm{Vek}}_k$ der Vektorräume über einem Körper k mit Vektorraumhomomorphismen und
- die Kategorie $\underline{\mathrm{Top}}$ der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen.

Q3: Welche Kategorien fallen Ihnen sonst noch ein, die Sie bereits kennen? Erfinden Sie weitere Beispiele.

Bemerkung 1.10. Die Graphen bilden mit den in Definition 1.7 definierten Morphismen, Kompositionsabbildungen und Identitätsabbildungen eine Kategorie $\underline{\text{Graph}}$.

Im Folgenden untersuchen wir, wann ein Graphenmorphismus f ein Isomorphismus ist und sehen, dass es bereits ausreichend ist, dass f_V und f_E bijektiv sind.

Proposition 1.11. *Ein Graphen-Morphismus*

$$f = (f_V, f_E) : \ \Gamma_1 = (V_1, E_1, \delta_1), \iota_1) \ \to \ \Gamma_2 = (V_2, E_2, \delta_2, \iota_2)$$

ist genau dann ein Isomorphismus, wenn f_V und f_E beide bijektiv sind.

Beweis. Ist f ein Isomorphismus, dann müssen nach der Definition von Isomorphismus und der Verknüpfung $\circ$ die beiden Abbildungen f_V und f_E bijektiv sein.
Sind umgekehrt f_V und f_E bijektiv, dann können wir $g : \Gamma_2 \to \Gamma_1$ durch $g = (f_V^{-1}, f_E^{-1})$ definieren. Man muss nun nachrechnen, dass g tatsächlich ein Graphenmorphismus ist. Wie immer notieren wir $\delta_1 = (o_1, t_1)$ und $\delta_2 = (o_2, t_2)$. Wir wissen, dass f ein Graphenmorphismus ist. Somit gilt zum Beispiel $f_V \circ o_1 = o_2 \circ f_E$ Daraus folgt:

$$o_1 \circ f_E^{-1} = f_V^{-1} \circ f_V \circ o_1 \circ f_E^{-1} = f_V^{-1} \circ o_2 \circ f_E \circ f_E^{-1} = f_V^{-1} \circ o_2.$$

Die beiden anderen Bedingungen aus der Definition in Definition 1.7.i folgen analog und somit ist g ein Graphenmorphismus. Dass $g \circ f = \mathrm{id}$ und $f \circ g = \mathrm{id}$ gilt, folgt direkt aus der Definitionen von g und $\circ$. □

Ein weiteres Feature in Kategorien sind Unterobjekte. In $\underline{\text{Set}}$ sind dies Teilmengen, in $\underline{\text{Grp}}$ Untergruppen, in $\underline{\text{Vek}_k}$ Untervektorräume und in $\underline{\text{Top}}$ topologische Unterräume . Im Folgenden definieren wir sie für unsere neue Kategorie $\underline{\text{Graph}}$.

Definition 1.12. $\Gamma' = (V', E', \delta', \iota')$ heißt Teilgraph von $\Gamma = (V, E, \delta, \iota)$, falls $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, $\delta' = \delta|_{E'}$ und $\iota' = \iota|_{E'}$.
Insbesondere gilt also: $e \in E' \Rightarrow o(e), t(e) \in V'$.

Zum Abschluss wollen wir noch Kantenzüge in Graphen einführen und sagen, was es heißt, dass ein Graph zusammenhängend ist. Mehr zu Wegen in Graphen gibt es dann in einem späteren Abschnitt.

Definition 1.13. Sei Γ ein Graph.

i) Ein Kantenzug c in Γ ist eine Folge $c = (e_1, \dots, e_n)$ mit $n \geq 1$ von Kanten $e_i \in E$, so dass $t(e_i) = o(e_{i+1})$ für $i \in \{1, \dots, n-1\}$ gilt. Wir bezeichnen $o(e_1)$ als *Anfangspunkt*, $t(e_n)$ als *Endpunkt* und $l(c) := n$ als *Länge von c*. Weiterhin definieren wir für jede Ecke $v \in V$ den *tivialen Kantenzug* w_v von Länge 0 mit Anfangspunkt $o(w_v) := v$ und Endpunkt $t(w_v) := v$.

ii) Γ ist *zusammenhängend*, falls es für je zwei Ecken v_1,v_2 in V einen Kantenzug c gibt mit $o(c) = v_1$ und $t(c) = v_2$.

2 Der Cayley-Graph

Ziele dieses Abschnitts:

- Erste Zusammenhänge zwischen den algebraischen Eigenschaften von (G, S) und dem Cayleygraphen $\Gamma(G, S)$
- G operiert auf Cayleygraph. Welche Eigenschaften hat diese Aktion?
- Wann sind Graphen Cayleygraphen?

In Definition 1.2 haben wir für eine Gruppe G und eine Teilmenge S von G den verallgemeinerten Cayleygraphen $\Gamma(G, S)$ definiert. Hier folgen einige erste einfach Beispiele.

Beispiel 2.1. i) Die Cayleygraphen $\Gamma(\mathbb{Z}, \{1\})$, $\Gamma(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$, $\Gamma(\mathbb{Z}^2, \{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\})$ haben wir bereits in der Einführung gesehen.

ii) $\Gamma(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \{\bar{1}\}) \cong \mathrm{Circ}_n$

iii) Die Quaternionengruppe $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ mit $S = \{i, j\}$.

Q4: Bestimmen Sie nun für Ihre Lieblingsgruppe einige Cayleygraphen.
Im folgenden untersuchen wir erste Eigenschaften von S, die man direkt aus den Eigenschaften von $\Gamma(G, S)$ ablesen kann.

Proposition 2.2. *Sei G eine Gruppe, $S \subseteq G$ und $\Gamma = \Gamma(G, S)$ der zugehörige verallgemeinerte Cayleygraph.*

i) Γ hat Schleifen $\Leftrightarrow 1 \in S$.

ii) Γ hat Doppelkanten $\Leftrightarrow \exists\, 1 \neq s \in S$ mit $s^{-1} \in S$.

iii) Γ *ist ein kombinatorischer Graph* $\Leftrightarrow S \cap S^{-1} = \emptyset$.

iv) Γ *ist zusammenhängend* $\Leftrightarrow S$ *ist ein Erzeugendensystem von* G.

Beweis. ***i)*** Γ hat eine Schleife $e = (g, s)$ bei der Ecke g genau dann wenn $g = o(e) = t(e) = g \cdot s$ gilt. Dies ist äquivalent zu $1 = s$.
Beachte hierbei, dass falls e eine Schleife ist, dann auch $\overline{e}$, deshalb durften wir hier ohne Einschränkung annehmen, dass $e \in \mathrm{E}_+$ und damit von der Form (g, s) ist.

ii) Γ hat genau dann eine Doppelkante e, falls es eine Kante f gibt mit $o(e) = o(f)$ und $t(e) = t(f)$. Indem wir, falls notwendig e durch $\overline{e}$ ersetzen, dürfen wir wiederum annehmen, dass e in E_+ ist, das heißt $e = (g, s)$ für ein $g \in G$ und $s \in S$. Die Kante f kann nicht ebenfalls in E_+ sein, da sonst f ebenfalls gleich (g, s) sein müsste. Ist $\overline{f} = (g', s')$ in E_+, dann gilt also $g' = o(\overline{f}) = t(f) = t(e) = g \cdot s$ und $g' \cdot s' = t(\overline{f}) = o(f) = o(e) = g$. Es folgt $g' = g \cdot s$ und $g' \cdot s' = g$ und damit $g \cdot s \cdot s' = g' \cdot s' = g$. Also ist $s \cdot s' = 1$ und somit $s' = s^{-1}$, s und s' beide in S und damit $S \cap S^{-1} \neq \emptyset$. Ist umgekehrt $1 \neq s \in S \cap S^{-1}$, dann gilt für $e = (g, s)$ und $f = \overline{(g \cdot s, s^{-1})}$, dass $o(e) = o(f)$ und $t(e) = t(f)$, somit gibt es Doppelkanten.

iii) folgt direkt aus i) und ii).

iv) $\Rightarrow$: Sei Γ zusammenhängend, $g \in G$ beliebig und $c = (e_1, \ldots, e_n)$ ein Kantenzug in Γ mit $o(c) = 1$ und $t(c) = g$. Sei $s_i \in S \cup S^{-1}$ die Kantenbewertung von e_i. Es gilt $t(e_i) = o(e_i) \cdot s_i$. Somit ist $g = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n$ und liegt somit im Erzeugnis $< S >$ von S.
$\Leftarrow$: Sei $< S >= G$. Seien g_1 und g_2 Ecken von Γ, also Elemente in G, und $g = g_1^{-1} \cdot g_2$. Da S Erzeugendensystem ist, lässt sich g schreiben als $g = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n$ mit $s_i \in S \cup S^{-1}$. Definiere die Kante e_i durch

$$\begin{aligned} e_i &= (g_1 \cdot s_1 \cdot \ldots \cdot s_{i-1}, s_i), \text{ falls } s_i \in S \\ e_i &= \overline{f_i} \text{ mit } f_i = (g_1 \cdot s_1 \cdot \ldots \cdot s_{i-1}, s_i) \text{ falls } s_i \notin S. \end{aligned}$$

Dann ist $c = (e_1, \ldots, e_n)$ ein Kantenzug von g_1 nach $g_1 \cdot s_1 \cdot \ldots \cdot s_n = g_1 \cdot g_1^{-1} g_2 = g_2$. Somit ist Γ zusammenhängend. □

Spätestens jetzt finden wir leicht die Antwort auf **Q1** aus Kapitel I. Die Rose R_n ist genau dann ein Cayleygraph, wenn $n = 0$ oder $n = 1$, denn eine Schleife kann nur von dem neutralen Element herkommen. In Γ_{hex} haben die Ecken ungerade Kardinalität, deshalb kann es kein Cayleygraph sein und Circ_n ist ein Cayleygraph zur zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Häufig interessiert man sich nur für den Fall, dass S ein Erzeugendensystem ist und $\Gamma(G,S)$ somit zusammenhängend. Üblicherweise nennt man dann $\Gamma(G,S)$ einen *Cayleygraphen*. Wir lassen hier allgemeiner beliebige Teilmengen zu und nennen die zugehörigen Graphen deshalb *verallgemeinerte Cayleygraphen*. Darüberhinaus ist die Definition von Cayleygraphen in der Literatur im folgenden Sinn nicht einheitlich. Manchmal werden Cayleygraphen als kombinatorische Graphen definiert. Gemeint ist dann der vom Graphen $\Gamma(G,S)$ aus Definition 1.2 im Sinne von Bemerkung 2.3 induzierte kombinatorische Graph.

Bemerkung 2.3. Jeder Graph $\Gamma = (V, E, \delta, \iota)$ definiert einen kombinatorischen Graphen $\Gamma' = (V', E', \delta', \iota')$ durch $V' = V$ und v_1 und v_2 in Γ' sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie in Γ durch eine Kante verbunden sind.

Als nächstes möchten wir sehen, dass die Gruppe G auf ihren Cayleygraphen operiert. Dazu erinnern wir zunächst an die Definition von Gruppenaktion ganz allgemein und dann im Speziellen für Graphen.

Definition 2.4. Es sei G eine Gruppe, $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie, X ein Objekt in C und $Aut(X)$ die Automorphismengruppe von X.

i) Eine *Aktion* von G auf X ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}(X).$$

ii) Zwei Aktionen $\rho_1 : G \to \mathrm{Aut}(X_1)$ und $\rho_2 : G \to \mathrm{Aut}(X_2)$ heißen *isomorph*, falls es einen Isomorphismus $f : X_1 \to X_2$ gibt mit

$$\rho_2 = f_\star \circ \rho_1, \text{ wobei } f_\star : \mathrm{Aut}(X_1) \to \mathrm{Aut}(X_2), h \mapsto f \circ h \circ f^{-1}.$$

Bemerkung 2.5. In den meisten Kategorien, die wir verwenden, sind die Objekte Mengen. Dies trifft zum Beispiel für unsere Beispiel-Kategorien $\underline{\mathrm{Set}}$, $\underline{\mathrm{Grp}}$, $\underline{\mathrm{Vek}}_k$ und $\underline{\mathrm{Top}}$ zu. In diesem Fall schreiben wir für $x \in X$:

$$g \cdot x := \rho(g)(x)$$

Zwei Aktionen $\rho_1 : G \to \mathrm{Aut}(X_1)$ und $\rho_2 : G \to \mathrm{Aut}(X_2)$ sind für solche Kategorien also genau dann äquivalent, wenn gilt:

$$\forall g \in G, x \in X_1 : f(g \cdot x) = g \cdot f(x).$$

Dies sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned}
\rho_2 = f_\star \rho_1 &\Leftrightarrow \quad \forall g \in G : \rho_2(g) = f_\star(\rho_1(g)) = f \circ \rho_1(g) \circ f^{-1} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall g \in G, y \in X : g \cdot y = f(g \cdot f^{-1}(y)) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall g \in G, x \in X : g \cdot f(x) = f(g \cdot x), \text{ da } f \text{ bijektiv.}
\end{aligned}$$

Wichtige Kenndaten für die Aktion sind Fixpunkte, Stabilisatorgruppen und Bahnen der Aktion. Ein Element x aus X heißt *Fixpunkt* von g, falls $g \cdot x = x$. $G \cdot x := \{g \cdot x | g \in G\}$ heißt *Bahn von* x und $\mathrm{Stab}(X) := \{g \in X | g \cdot x = x\}$ heißt *Stabilisator* von x in G. Die Aktion heißt *transitiv*, falls $G \cdot x = X$, sie heißt *frei* bzw. *fixpunktfrei*, falls $\forall x \in X : \mathrm{Stab}(x) = \{1\}$ und *treu*, falls $G \to \mathrm{Aut}(X)$ injektiv ist.

Beispiel 2.6. Speziell für die Kategorie $\mathcal{C} = \underline{\text{Graph}}$ ist eine Gruppenaktion also gegeben als $\rho = (\rho_V, \rho_E)$ mit Gruppenhomomorphismen $\rho_V : G \to \mathrm{Perm}(V)$ und $\rho_E : G \to \mathrm{Perm}(E)$, so dass für alle $g \in G$ und $e \in E$ gilt:

i) $\rho_V(g)(o(e)) = o(\rho_E(g)(e))$,

ii) $\rho_V(g)(t(e)) = t(\rho_E(g)(e))$ und

iii) $\rho_E(g)(\overline{e}) = \overline{\rho_E(g)(e)}$.

Mit der Notation aus Bemerkung 2.5 schreiben sich Bedingungen als:

$$\text{i) } g \cdot o(e) = o(g \cdot e), \quad \text{ii) } g \cdot t(e) = t(g \cdot e) \text{ und } \text{iii) } g \cdot \overline{e} = \overline{g \cdot e}$$

Proposition 2.7. *Sei G eine Gruppe, $S \subseteq G$.*
G operiert auf $\Gamma = \Gamma(S, G)$ durch Multiplikation von links, das heißt wir definieren $\rho : G \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$ als $\rho = (\rho_V, \rho_E)$ mit für $g \in G$ ist:

- $\rho_V(g) : V \to V, h \mapsto g \cdot h$
- $\rho_E(g) : E \to E, \ \ e \mapsto (g \cdot h, s),$ *falls* $e = (h, s) \in \mathrm{E}_+$
  $e \mapsto \overline{f}$ *mit* $f = (g \cdot h, s)$ *falls* $\overline{e} = (h, s) \in \mathrm{E}_+$

Beweis. Es ist $\rho_V(g_1 \cdot g_2)(h) = g_1 \cdot g_2 \cdot h = \rho_V(g_1)(g_2 \cdot h) = (\rho_V(g_1) \circ \rho_V(g_2))(h)$. Somit gilt $\rho_V(g_1 \cdot g_2) = \rho_V(g_1) \circ \rho_V(g_2)$, also ist ρ_V ein Gruppenhomomorphismus. Analog ergibt sich, dass ρ_E ein Gruppenhomomorphismus ist.
Wir müssen nun noch zeigen, dass $\rho(g)$ wirklich ein Graphmorphismus ist. Wir müssen also die drei Bedingungen aus Beispiel 2.6 überprüfen. Es gilt aber für $e = (h, s) \in \mathrm{E}_+$:

i) $\rho_V(g)(o(e)) = \rho_V(g)(h) = g \cdot h$ und $o(\rho_E(g)(e)) = o(g \cdot h, s) = g \cdot h$,

ii) $\rho_V(g)(t(e)) = \rho_V(g)(hs) = ghs$ und $t(\rho_E(g)(e)) = t(g \cdot h, s) = ghs$ und schließlich

iii) $\rho_E(g)(\overline{e}) = \overline{\rho_E(g)(e)}$ nach Definition.

Da nach der Definition der Gruppenaktion die Kanten aus $\overline{\mathrm{E}_+}$ jeweils auf die entsprechende Gegenkante abgebildet werden, gilt i) - iii) auch für $e \in \overline{\mathrm{E}_+}$. $\square$

Nun wollen wir diese Aktion der Gruppe auf ihren Cayleygraphen genauer untersuchen. Wie wir in Beispiel 2.6 erläutert haben, besteht die Aktion aus einer Aktion auf der Eckenmenge und einer Aktion auf den Kantenmenge. Gibt es Fixpunkte? Was sind die Stabilisatorgruppen? Wieviele Bahnen gibt es?

Proposition 2.8. *Sei G eine Gruppe, $S \subseteq G$, $\Gamma = \Gamma(G, S)$ und $\rho = (\rho_E, \rho_V)$ die Aktion durch Linksmultiplikation auf Γ aus Proposition 2.7, dann gilt:*

i) Die Aktion ist fixpunktfrei auf Ecken und Kanten, das heißt ρ_V und ρ_E haben keine Fixpunkte.

ii) $\rho : G \to Aut(\Gamma)$ ist injektiv.

iii) Für die Aktion ρ_E gilt sogar:

$$\forall g \in G, g \neq 1, e \in E : \rho_E(g)(e) \notin \{e, \overline{e}\}.$$

Das heißt die von ρ_E induzierte Aktion auf den geometrischen Kanten ist ebenfalls fixpunktfrei.

iv) Die Aktion ρ_E ist transitiv.

Beweis. ***i)*** Für $g, h \in G$ gilt:

$$\rho_V(g)(h) = h \Leftrightarrow g \cdot h = h \Leftrightarrow g = 1$$

Daraus folgt, dass die Aktion ρ_V fixpunktfrei ist und damit folglich auch die Aktion ρ_E.

ii) Dies folgt direkt aus i), denn für $g \neq 1$ hat $\rho_V(g)$ keine Fixpunkte und ist damit insbesondere ungleich id.

iii) Die Aktion ρ_E respektiert nach Definition E_+, es gilt $\rho_E(G) \cdot \mathrm{E}_+ = \mathrm{E}_+$. Somit kann $e \in E$ nie auf $\overline{e}$ abgebildet werden. Weiterhin ist nach i) $\rho(g)(e) \neq e$ für $g \neq 1$.

iv) Wir müssen zeigen, dass es für zwei beliebige Ecken h_1 und h_2 des Cayleygraphen ein Gruppenelement g gibt, so dass $h_2 = \rho_V(g)(h_1) = g \cdot h_1$. Das Gruppenelement $g = h_2 \cdot h_1^{-1}$ leistet das Gewünschte. □

Motiviert durch Proposition 2.8 definieren wir die folgenden Eigenschaften für Gruppenaktionen auf Graphen.

Definition 2.9. Eine Aktion $\rho = (\rho_V, \rho_E) : G \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$ einer Gruppe G auf einem Graphen Γ heißt *inversionsfrei*, falls

$$\forall g \in G, e \in E : \rho_E(g)(e) \neq \overline{e},$$

sie operiert *fixpunktfrei auf Ecken*, falls ρ_V fixpunktfrei ist, und sie operiert *eckentransitiv*, falls ρ_V transitiv ist.

Wir werden im nächsten Abschnitt Graphen als metrische Räumen auffassen. Dann kann eine Gruppenaktion darauf Fixpunkte haben, auch wenn ρ_V fixpunktfrei ist. Genauer sind solche zusätzlichen Fixpunkte Kantenmittelpunkte. Solche Fixpunkte bekommen wir genau dann, wenn die Aktion nicht inversionsfrei ist.

Korollar 2.10. *Die Aktion durch Linksmultiplikation auf einem Cayleygraph ist fixpunktfrei auf Ecken, eckentransitiv und inversionsfrei.*

Wie einschränkend sind die Bedingungen aus Korollar 2.10? Es stellt sich heraus, dass sie Cayleygraphen und die Aktion darauf durch Linksmultiplikation für kombinatorische Graphen bereits charakterisieren. Dies sehen wir im Theorem von Sabidussi (Theorem 1) und bekommen dadurch ein Kriterium, wann ein kombinatorische Graph Γ ein Cayleygraph ist. Es ist allerdings kein rein kombinatorisches Kriterium, sondern wir müssen dafür die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ untersuchen.

Theorem 1 (Theorem von Sabidussi)**.** *Sei $\Gamma = (V, E, \delta, \iota)$ ein kombinatorischer Graph.*

i) Sei $\rho : G \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$ eine Aktion einer Gruppe G auf Γ. ρ ist genau dann isomorph zu einer Aktion von G auf einem Cayleygraphen $\Gamma(G, S)$, wenn die Aktion ρ fixpunktfrei auf Ecken, inversionsfrei und eckentransitiv ist.

ii) Γ ist genau dann ein Cayleygraph, wenn $Aut(\Gamma)$ eine Untergruppe enthält, die fixpunktfrei auf Ecken, inversionsfrei und eckentransitiv auf Γ operiert.

Beweis. **i)** Die Richtung „$\Rightarrow$“ folgt aus Korollar 2.10. Für die Richtung „$\Leftarrow$“ verfahren wir in drei Schritten. Wir finden zunächst eine geeignete Teilmenge S von G, definieren dann einen Graphenmorphismus $f : \Gamma(G,S) \to \Gamma$ und zeigen schließlich, dass f ein Isomorphismus ist, der die Aktionen respektiert.

1. Schritt: Definiere S.
Wähle eine beliebige Ecke $x \in V$. Sei $\tilde{S} := \{g \in G|\ g \cdot x \text{ und } x \text{ sind benachbart in } \Gamma\}$. Dann gilt für $\tilde{S}$:

1. $\tilde{S}$ ist abgeschlossen unter Inversenbildung:
   $s \in \tilde{S} \Rightarrow s \cdot x$ und x sind benachbart $\Rightarrow x$ und $s^{-1} \cdot x$ sind benachbart, da s als Graphenautomorphismus operiert $\Rightarrow s^{-1} \in \tilde{S}$.

2. Ist $s \in \tilde{S}$, dann gilt $s^{-1} \neq s$:
   Angenommen, es gilt: $s^{-1} = s$ und somit $s^2 = 1$. Da s in $\tilde{S}$, gibt es eine Kante e in Γ mit $o(e) = x$ und $t(e) = s \cdot x$. Dann ist $s \cdot e$ eine Kante mit $o(s \cdot e) = s \cdot x$ und $t(s \cdot e) = s^2 \cdot x = x$. Da Γ kombinatorisch ist, folgt $s \cdot e = \overline{e}$. Dies widerspricht der Inversionsfreiheit von ρ.

Aus 1. und 2. folgt: $\tilde{S}$ zerfällt in Paare der Form (s, s^{-1}): Wähle nun aus jedem Paar (s, s^{-1}) einen der beiden aus und bilde daraus die Menge S. Insbesondere gilt dann $S \cap S^{-1} = \emptyset$ und:

$$x \text{ und } s \cdot x \text{ sind benachbart in } \Gamma \Leftrightarrow s \in S \text{ oder } s^{-1} \in S$$

Nun wollen wir also zeigen, dass Γ und $\Gamma' = \Gamma(G,S)$ isomorph sind. Dazu definieren wir uns zunächst einen Graphenhomomorphismus $f : \Gamma' \to \Gamma$ und zeigen dann im dritten Schritt, dass dieser ein Isomorphismus ist.

2. Schritt: Definiere Morphismus $f : \Gamma' \to \Gamma$.
Wie üblich notieren wir $\Gamma = (V, E, \delta, \iota)$ und $\Gamma' = (V', E', \delta', \iota')$. Nach Schritt 1 und Proposition 2.2 ist Γ' ein kombinatorischer Graph. Somit genügt es eine Abbildung $f_V : V' \to V$ zu definieren. Bildet diese benachbarte Ecken auf benachbarte Ecken ab, so bestimmt sie einen eindeutigen Graphenmorphismus $f = (f_V, f_E) : \Gamma' \to \Gamma$. Wir definieren:

$$f_V : V' = G \to V \text{ durch } g \mapsto g \cdot x.$$

Dann gilt: f_V bildet benachbarte Ecken auf benachbarte Ecke ab, denn:
g und h benachbart $\Rightarrow \exists s \in S \cup S^{-1}$ mit $g \cdot s = h$. $\Rightarrow f_V(g) = g \cdot x$ und $f_V(h) = f_V(g \cdot s) = g \cdot s \cdot x$. Da $s \in S$, sind x und $s \cdot x$ benachbart. Dann aber auch $g \cdot x$ und $g \cdot s \cdot x$, da g als Graphmorphismus operiert.

3. Schritt: Zeige, dass f ein Isomorphismus ist.
Wir zeigen zunächst, dass f_V bijektiv ist,
f_V ist injektiv, denn: $g \cdot x = h \cdot x \Rightarrow g^{-1}h \cdot x = x \Rightarrow g^{-1}h = 1$, da ρ_V fixpunktfrei ist.
f_V ist surjektiv, denn: Ist $y \in V$, so gibt es, da ρ_V transitiv ist, ein g in G mit $y = g \cdot x$. Somit ist $y = \rho_V(g)$.
Sei f_V^{-1} die Inverse zu f_V. Es bleibt noch zu zeigen, dass f_V^{-1} ein Graphenmorphismus ist. Da Γ ein kombinatorischer Graph ist, müssen wir also nur zeigen, dass für zwei in Γ benachbarte Ecken y_1 und y_2 auch ihre Bilder $g_1 := f_V^{-1}(y_1)$ und $g_2 := f_V^{-1}(y_2)$ in Γ' benachbart sind.
Es gilt: $y_1 = f_V(g_1) = g_1 \cdot x$ und $y_2 = f_V(g_2) = g_2 \cdot x$ sind benachbart.
$\Rightarrow$ $g_1^{-1}y_1 = x$ und $g_1^{-1} \cdot y_2 = g_1^{-1}g_2 \cdot x$ sind benachbart.
$\Rightarrow$ $g_1^{-1}g_2 \in S$ oder $g_1^{-1}g_2 \in S^{-1}$.
$\Rightarrow$ $(g_1, g_1^{-1}g_2)$ ist Kante von g_1 nach g_2 oder $(g_2, g_2^{-1}g_1)$ ist Kante von g_2 nach g_1 in Γ.
Folglich sind g_1 und g_2 benachbart und f_V^{-1} definiert tatsächlich einen Graphenmorphismus, der invers zu f ist. Also ist f ein Isomorphismus.
Schließlich respektiert f die beiden Gruppenaktionen, also die Aktion durch Linksmultiplikation auf $\Gamma(G,S)$ und die Aktion ρ auf Γ, denn es gilt für $g \in G$ und beliebige Ecken h von $\Gamma(G,S)$:

$$f(g \cdot h) = (g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot f(h)$$

ii) „$\Rightarrow$“: Nach Proposition 2.8 ist die Aktion durch Linksmultiplikation ein injektiver Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$ und das Bild operiert fixpunktfrei und transitiv auf Γ.
„$\Leftarrow$“: folgt direkt aus i). $\square$

3 Geometrische Realisierung von Graphen

Ziele dieses Abschnitts:

- Graphen Γ können als topologische Räume X aufgefasst werden. Wir nennen X *geometrische Realisierung* zu Γ.
- Die geometrische Realisierung eines Graphen trägt in natürliche Weise eine Metrik, die wir *Graphenmetrik* nennen.
- Graphenisomorphismen sind Isometrien.

Wir definieren zunächst für Γ einen topologischen Raum $X = \Gamma^{\text{geom}}$.

Definition 3.1. Sei $\Gamma = (V, E, \delta, \iota)$ ein Graph.

i) Sei X_e für jedes $e \in E$ eine Kopie des Einheitsintervalls $I = [0,1]$, also $X_e := [0,1] \times \{e\}$. Definiere

$$X := \Gamma^{\mathrm{geom}} := (\coprod_{e \in E} X_e \coprod V)/_\sim,$$

wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation ist, die erzeugt wird von:

$$\begin{array}{llcl} \forall e \in E, t \in [0,1]: & (t,e) & \sim & (1-t,\overline{e}) \\ \forall e \in E: & (0,e) & \sim & o(e) \text{ und} \\ \forall e \in E: & (1,e) & \sim & t(e). \end{array}$$

ii) Betrachte Γ^{geom} als topologischen Raum versehen mit der folgenden Topologie. Wähle

- die *diskrete Topologie* auf E und V (d.h.: alle Teilmengen sind offen).
- die Topologie als *topologische Summe* auf der disjunkten Vereinigung (d.h.: $V \subseteq \coprod_{i \in I} A_i$ offen $\Leftrightarrow \forall i \in I : V \cap A_i$ offen).
- die *Spurtopologie* auf dem Quotienten $(\coprod_{e \in E} X_e \coprod V)/_\sim$ (d.h.: V offen $\Leftrightarrow p^{-1}(V)$ offen, wobei p die natürliche Projektion auf den Quotienten ist).

iii) Beachte: Die Abbildung $i_V : V \to \Gamma^{\mathrm{geom}}, v \mapsto [v]_\sim$ und $\chi_e : [0,1] \to \Gamma^{\mathrm{geom}}, t \mapsto [(t,e)]_\sim$ sind stetig, i_V ist injektiv, $\chi_e|_{[0,1)}$ ist injektiv und $\chi_e(t) = \chi_{\overline{e}}(1-t)$.
Wir notieren später häufig:

$$v = [v]_\sim = i_V(v) \in \Gamma^{\mathrm{geom}}, \quad (t,e) = \chi_e(t) = \chi_{\overline{e}}(1-t) = (1-t,\overline{e}) \in \Gamma^{\mathrm{geom}}$$

und bezeichnen $v = i_V(v)$ und $(t,e) = \chi_e(t)$ auch als *Eckpunkt* bzw. *innerer Kantenpunkt* des Graphen.

Zunächst überlegen wir uns, dass die Struktur von Graphen als topologische Räume mit dem Morphismusbegriff verträglich ist.

Bemerkung 3.2. Seien im Folgenden Γ, Γ_1 und Γ_2 Graphen.

i) Ein Morphismus $f \in \mathrm{Mor}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ definiert eine stetig Abbildung

$$\mathrm{f}^{\mathrm{geom}} : \Gamma_1^{\mathrm{geom}} \to \Gamma_2^{\mathrm{geom}}, \begin{array}{lccl} V_1 & \ni & v & \mapsto & f_V(v) \\ X_e & \ni & (t,e) & \mapsto & (t, f_E(e)) \end{array}$$

ii) Es gilt:

$$\begin{array}{rcl}(f\circ g)^{\text{geom}} &=& f^{\text{geom}}\circ g^{\text{geom}}\\ (\mathrm{id}_\Gamma)^{\text{geom}} &=& \mathrm{id}_{\Gamma^{\text{geom}}}\end{array}$$

Das heißt die Zuordnungen $\Gamma \mapsto \Gamma^{\text{geom}}$ und $f \mapsto \mathrm{f}^{\text{geom}}$ bilden einen *Funktor* $\underline{\text{Graph}} \to \underline{\text{Top}}$.

Exkurs: Allgemein ist ein *Funktor* $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ zwischen zwei Kategorien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ per Definition gegeben durch

- eine Zuordnung $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_1) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_2), C \mapsto F(C)$ und
- für je zwei Objekte C_1 und C_2 eine Zuordnung $\mathrm{Mor}(C_1, C_2) \to \mathrm{Mor}(F(C_1), F(C_2)), f \mapsto F(f)$,

so dass $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ und $F(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{F(C)}$.

Wir möchten nun auf Γ^{geom} eine Metrik definieren, indem wir jeder Kante des Graphen eine Länge vorgeben. Dazu definieren wir allgemeiner, wie eine lokal gegebene Metrik eine globale Metrik definiert. Hierzu folgen zunächst zwei kleine Erinnerungen aus der Topologie:

- Jede Metrik d auf einer Menge X definiert eine Topologie auf X durch: $U \subseteq X$ offen $:\Leftrightarrow \forall x \in U\, \exists\, \varepsilon > 0 :\ B(x, \varepsilon) := \{y \in X | d(x, y) < \varepsilon\} \subseteq U$.
- Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt *Pseudometrik*, falls gilt: $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = d(y, x)$ und $\forall x, y, z \in X : d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Eine Pseudometrik d ist also genau dann ein Metrik, wenn $\forall x, y \in X$ mit $x \neq y$ gilt, dass $d(x, y) \neq 0$.

Bemerkung 3.3. Sei X ein zusammenhängender Raum, $\{U_i\}_{i\in I}$ eine *offene Überdeckung* von X (d.h. $X = \cup_{i\in I} U_i$ und alle U_i sind offen). Für jedes $i \in I$ sei eine Metrik d_i auf U_i gegeben, so dass gilt: $\forall i, j \in I : d_i|_{U_i\cap U_j} = d_j|_{U_i\cap U_j}$. Dann definieren die d_i's eine Pseudometrik auf X durch

$$d(x, y) := \inf\{\sum_{k=0}^{n-1} d_{i_k}(x_k, x_{k+1}) | x_0 = x, x_n = y \text{ und } x_k, x_{k+1} \in U_{i_k}\}.$$

Beweis. Wir verwenden folgende Notation für $x, y \in X$:

$$\begin{array}{lcl}S(x, y) &:=& \{(x_0, \dots, x_n)|\ x_0 = x, x_n = y, x_k, x_{k+1} \in U_{i_k} \text{ für ein } i_k\}\\ l(w) &:=& \sum_{k=0}^{n-1} d_{i_k}(x_k, x_{k+1}) \text{ für } w = (x_0, \dots, x_n) \in S(x, y)\end{array}$$

Aus der Definition von d folgt direkt, dass $d \geq 0$ und dass d symmetrisch ist. Bleibt noch die Dreiecksungleichung zu zeigen: Sind x, y und z in X, so gilt: Ist $w_1 = (x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y) \in S(x,y)$ und $w_2 = (y = y_0, y_1, \ldots, y_m = z) \in S(y,z)$, dann ist $w_3 = (x = x_0, \ldots, x_n = y = y_0, \ldots, y_m = z) \in S(x,z)$ und $l(w_3) = l(w_1) + l(w_2)$. Daraus folgt, dass $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.
Schließlich müssen wir noch zeigen, dass d wohldefiniert ist, also dass $S(x,y) \neq \emptyset$. Hier muss die Voraussetzung, dass X zusammenhängend ist, eingehen. Wähle dazu $V_x := \{y \in X \,|\, S(x,y) \neq \emptyset\}$ als die Menge der von x aus erreichbaren Punkte und $W_x := \{y \in X \,|\, S(x,y) = \emptyset\}$ als die Menge der unerreichbaren Punkte. Für beide Mengen gilt nach der Definition von $S(x,y)$, dass sie für jedes $i \in I$ die offene Menge U_i entweder ganz enthalten, oder der Schnitt leer ist. Somit gilt für $I' := \{i \in I \,|\, U_i \cap V_x \neq \emptyset\}$:

$$V_x = \bigcup_{i \in I} V_x \cap U_i = \bigcup_{i \in I'} U_i \text{ und } W_x = \bigcup_{i \in I \setminus I'} U_i$$

Insbesondere sind somit V_x und W_x beide offen und es gilt $X = V_x \coprod W_x$. Da X zusammenhängend ist und $x \in V_x$, muss also $W_x = \emptyset$ gelten. Somit gilt für alle y, dass $S(x,y) \neq \emptyset$. □

Nun wollen wir dies benutzen, um die Graphenmetrik definieren.

Definition 3.4. Sei $\Gamma = (V, E, \delta, \iota)$ ein zusammenhängender Graph und $X = \Gamma^{\text{geom}}$ seine metrische Realisierung. Wähle die folgenden offenen Teilmengen. Dabei sei $r := \frac{1}{4}$.

- $\forall e \in E: \; U_e := \chi_e((0,1))$
- $\forall v \in V: \; U_{v,r} := \bigcup_{o(e)=v} \chi_E([0,r))$

und dazu passend die Metriken:

- d_e auf U_e: $d_e((t_1,e),(t_2,e)) = |t_1 - t_2|$
- $d_{V,r}$ auf U_V für $x = (t_1, e_1)$, $y = (t_2, e_2)$ mit $o(e_1) = o(e_2)$:

$$d_{V,r}(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} |t_1 - t_2|, \text{ falls } e_1 = e_2 \\ t_1 + t_2, \text{ falls } e_1 \neq e_2 \end{array} \right.$$

Sei d die Pseudometrik, die man nach Bemerkung 3.3 erhält. Diese ist in diesem Fall tatsächlich auch eine Metrik und wir bezeichnen sie als die *Graphenmetrik* d_Γ zu Γ.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass d tatsächlich eine Metrik ist. Seien x, y in X mit $d(x,y)=0$. Sei $w=(x_0,\dots,x_n)$ in $S(x,y)$. Gibt es in w aufeinanderfolgende Punkte x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, die nicht in der gleichen Umgebung liegen, also $U_{i_{k-1}}\neq U_{i_k}$, dann erhalten wir wie folgt eine untere Schranke für $l(w)$: Ohne Einschränkung ist $U_{i_{k-1}}$ eine Umgebung der Form U_e, U_{i_k} eine Umgebung der Form $U_{v,r}$, x_{k-1} liegt nicht in $U_{v,r}$ und x_{k+1} liegt nicht in U_e. Es ist also $x_{k-1}=(t_1,e)$ mit $t_1>\frac{1}{4}$, $x_k=(t_2,e)$ mit $t_2<\frac{1}{4}$ und $x_{k+1}=(t_3,e')$ mit $o(e)=o(e')$, $e\neq e'$. Somit ist $d(x_{k-1},x_k)+d(x_k,x_{k+1})=t_1-t_2+t_2+t_3\geq t_1>\frac{1}{4}$ und damit $l(w)>\frac{1}{4}$.
Da $d(x,y)=0$, gibt es nun aber eine Folge $w^{(j)}$ in $S(x,y)$ mit $l(w^{(j)})\to 0$. Solch ein Folgenglied $w=(x_0,\dots,x_n)$ mit $l(w)<\frac{1}{4}$ hat nach der vorhergehenden Überlegung die Eigenschaft, dass alle x_i in einer festen Umgebung U_k liegen. Dann ist aber $l(w)\geq d_k(x,y)$. Damit wir im Infimum 0 erhalten, muss also $d_k(x,y)=0$ gelten. Da d_k eine Metrik ist, folgt $x=y$. □

Im Folgenden wollen wir uns ansehen, wie sich die Graphenmetrik berechnet.

Bemerkung 3.5. Sei $\Gamma=(V,E,\delta,\iota)$ zusammenhängender Graph, $X:=\Gamma^{\text{geom}}$ die metrische Realisierung und d die Graphenmetrik.

i) Für $x,y\in X$ gilt:

   (a) Für $e\in E$ keine Schleife gilt:
   $x,y\in\chi_e([0,1])$, also $x=(t_1,e)$ und $y=(t_2,e)$
   $\Rightarrow d(x,y)=|t_1-t_2|$

   (b) Für $e\in E$ Schleife gilt:
   $x,y\in\chi_e([0,1])$, also $x=(t_1,e)$ und $y=(t_2,e)$
   $\Rightarrow d(x,y)=\min\{|t_1-t_2|,1-|t_1-t_2|\}$

   (c) Für x und y in V gilt:
   $d(x,y)=\min\{n\in\mathbb{N}|\,\exists \text{ Kantenzug } (x=x_0,x_1,\dots,x_n=y)\}$

   (d) Für unterschiedliche Kanten $e_1\neq e_2$ gilt:
   $x=(t_1,e_1),y=(t_2,e_2)$
   $\Rightarrow d(x,y)=\min\{t_1+d(o(e_1),o(e_2))+t_2,1-t_1+d(t(e_1),t(e_2))+1-t_2,t_1+d(o(e_1),t(e_2))+1-t_2,1-t_1+d(t(e_1),o(e_2))+t_2\}$

ii) Ist $w:E\to\mathbb{R}_{>0}$ nach unten beschränkte geometrische Kantenbeschriftung, das heißt $\forall e\in E: w(e)=w(\overline{e})$ und es gibt ein $C>0$, so dass $\forall e\in E: w(e)\geq C$, dann kann analog wie in Definition 3.4 eine Metrik auf X definiert werden, so dass die geometrische Kante $\{e,\overline{e}\}$ Länge $w(e)$ hat. Man beachte, dass dies nicht bedeutet, dass die Randpunkte einer Kante e Abstand $w(e)$ haben.

Beweis. Die Aussagen folgen mit analogen Argumenten wie im Beweis von Definition 3.4. □

Die folgenden Beispiele zeigen, was schief gehen kann.

Beispiel 3.6. Betrachte die folgenden beiden Graphen.

i) Für den ersten Graph seien $V := \{A, B\}$, $\mathrm{E}_+ := \mathbb{N}$ und δ definiert durch $\forall e \in \mathrm{E}_+ : o(e) := A$ und $t(e) := B$. Betrachte die Kantenbeschriftung $w : \mathrm{E}_+ \to \mathbb{R}_{>0}, n \mapsto \frac{1}{n}$.
Dann führt die Konstruktion aus Bemerkung 3.5ii) zu einer Pseudometrik und es gilt $d(A, B) = 0$.

ii) Nun sei Γ gegeben durch $V := \{0\} \cup \mathbb{N}$ und $\mathrm{E}_+ = \{e_n | n \in \mathbb{N}\}$ mit $o(e_n) = 0$ und $t(e_n) = n$. Sei d die zugehörige Graphenmetrik. Betrachte die Menge
$$U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \chi_{e_n}([0, \frac{1}{n}))$$
Dann ist U offen in $X = \Gamma^{\mathrm{geom}}$, aber U enthält keine Kreisscheibe $B(\varepsilon, 0)$ um 0, somit ist U nicht offen bezüglich der durch d definierten Topologie.

iii) Sei Γ nun der Graph Circ_3 aus Beispiel 1.4, also ein Graph mit 3 Ecken A, B, C, 3 Kanten a, b, c und alle Ecken haben Valenz 2. Wähle die Kantenbeschriftung $w : \mathrm{E}_+ \to \mathbb{R}_{>0}$ mit $w(a) = 3$, $w(b) = 1$ und $w(c) = 1$. Seien A und B die Endpunkte von a. Dann ist $d(A, B) = 2$, obwohl die Kante a die Länge 3 hat. Insbesondere gilt $d|_a \neq d_a$, wobei d_a die ursprüngliche Metrik auf der Kante a ist.

In Beispiel 3.6 ii) haben wir gesehen, dass die Graphenmetrik d eine echt neue Topologie auf dem Graphen definiert. Das gleiche Argument funktioniert immer, sobald wir eine Ecke haben, die zu unendlich vielen Kanten adjazent ist. Später werden wir allerdings hauptsächlich an Cayleygraphen für Gruppen mit endlichem Erzeugersystem interessiert sein. Somit tritt dieses Problem dort nicht auf.

Bemerkung 3.7. Hat Γ eine Ecke mit unendlicher Valenz, dann stimmen die Topologie der geometrischen Realisierung Γ^{geom} aus Definition 3.1 und die durch die Graphenmetrik definierte Topologie nicht überein. Wir bezeichnen mit $(\Gamma^{\mathrm{metr}}, d_\Gamma)$ den metrischen Raum, wobei Γ^{metr} als Menge gleich Γ^{geom} ist und mit der Graphenmetrik d_Γ zum metrischen Raum wird. Wir nennen $(\Gamma^{\mathrm{metr}}, d_\Gamma)$ auch *metrische Realisierung* von Γ.

Schließlich müssen wir uns noch davon zu überzeugen, dass wir durch Betrachtung der Metrik im Wesentlichen keinen neuen Isomorphismusbegriff bekommen. Für einen Graphenmorphismus $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ bezeichnen wir mit $f^{\mathrm{metr}} : \Gamma_1^{\mathrm{metr}} \to \Gamma_2^{\mathrm{metr}}$ die Abbildung, die von f auf den metrischen Realisierungen induziert wird. Das heißt auf den zugrundeliegenden Mengen gilt $f^{\mathrm{metr}} = f^{\mathrm{geom}}$.

Proposition 3.8. *Seien Γ_1 und Γ_2 Graphen.*

i) Ist $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ ein Isomorphismus, dann ist $f^{\mathrm{metr}} : \Gamma_1^{\mathrm{metr}} \to \Gamma_2^{\mathrm{metr}}$ eine Isometrie.

ii) Falls Γ_1 zusammenhängend ist und eine Ecke von Valenz ungleich 2 besitzt, so gilt: Zu jeder Isometrie $h : \Gamma_1^{\mathrm{metr}} \to \Gamma_2^{\mathrm{metr}}$ gibt es einen Graphenmorphismus h_Γ mit $h = {h_\Gamma}^{\mathrm{metr}}$.

iii) Es gilt: Γ_1 und Γ_2 sind isomorph $\Leftrightarrow$ Γ_1 und Γ_2 sind isometrisch. Weiterhin gilt für einen zusammenhängenden Graph Γ mit $\Gamma \ncong \mathrm{Circ}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{Isom}(\Gamma^{\mathrm{metr}}) \cong \mathrm{Aut}(\Gamma),$$

wobei $\mathrm{Isom}(\Gamma^{\mathrm{metr}})$ die Gruppe der Isometrien von $(\Gamma^{\mathrm{metr}}, d_\Gamma)$ sei.

Beweis. **i)** Zur einfacheren Schreibweise notieren wir f^{metr} als f. Nach Definition von f^{metr} ist dann $f(t, e) = (t, f_E(e))$. Damit gilt insbesondere für die in Definition 3.4 definierten Umgebungen und die Metriken darauf:

- $f(U_e) = U_{f_E(e)}$ und $f(U_{v,r}) = U_{f_V(v),r}$
- Sind $x = (t_1, e)$ und $y = (t_2, e)$ in U_e, dann ist

  $$d_{f_E(e)}(f(x), f(y)) = d_{f_E(e)}((t_1, f_E(e)), (t_2, f_E(e))) = |t_1 - t_2| = d(x, y).$$

  Analog gilt für $x, y \in U_{v,r}$: $d_{f_V(v),r}(f(x), f(y)) = d_{V,r}(x, y)$

Sind nun x und y beliebig aus Γ_1^{metr}, dann gilt für $w = (x_0, \ldots, x_n)$ in $S(x, y)$, dass $f(w) := (f(x_0), \ldots, f(x_n))$ in $S(f(x), f(y))$ und $l(f(w)) = l(w)$. Somit ist $d(f(x), f(y)) \le d(x, y)$. Betrachten wir f^{-1} statt f, so erhalten wir Gleichheit.

ii) Sei zunächst $h : \Gamma_1^{\mathrm{metr}} \to \Gamma_2^{\mathrm{metr}}$ ein Homöomorphismus. Ist v eine Ecke von Valenz k, so gilt für kleine Umgebungen U von v, dass $U \backslash \{v\}$ aus k Zusammenhangskomponenten besteht. Für einen inneren Kantenpunkt x bekommt man 2 Zusammenhangskomponenten. Deshalb bildet für $k \neq 2$ der Homöomorphismus h Ecken von Valenz k auf Ecken von Valenz k ab. Sei h nun

sogar eine Isometrie und v eine Ecke von Γ_1 von Valenz $k \neq 2$. Jede andere Ecke hat ganzzahligen Abstand von v und diese Eigenschaft charakterisiert die Ecken von Γ_1. Analoges gilt für $h(v)$ und Γ_2. Da h Isometrie ist, bildet h also Ecken auf Ecken ab und wir erhalten eine Abbildung $h_V : V_1 \to V_2$. Definiere h_E durch $e \mapsto f$ mit f ist die Kante, die $h(x)$ enthält für $x \in e$. Die Abbildung $h_\Gamma := (h_V, h_E)$ ist dann Graphenmorphismus mit Inverser $(h^{-1})_\Gamma$ und es gilt ${h_\Gamma}^{\mathrm{metr}} = h$.
iii) Die Richtung „$\Rightarrow$“ folgt aus i). Ist $\Gamma_1 \ncong \mathrm{Circ}_n$, so folgt die Gegenrichtung aus ii). Für die Graphen der Form Circ_n sieht man die Aussage direkt.
Die Abbildungen $\mathrm{Aut}(\Gamma) \to \mathrm{Isom}(\Gamma)$, $f \mapsto f^{\mathrm{metr}}$ und $\mathrm{Isom}(\Gamma) \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $h \mapsto h_\Gamma$ sind invers zueinander, somit gilt $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cong \mathrm{Isom}(\Gamma)$.

□

Notationen: Wir werden später häufig statt Γ^{geom} und Γ^{metr} nur noch Γ schreiben und statt $\Gamma = (V, E, \delta, \iota)$ nur $\Gamma = (V, E)$.

4 Bäume und Quotientengraphen

Ziele dieses Abschnitts:

- Einführung von Bäumen
- Bäume sind universell: jeder Graph ist Quotient eines Baumes

Zunächst geben wir eine kombinatorische Definition von Bäumen an. Hierzu betrachten wir Kantenzüge $w = (e_1, \ldots, e_n)$, wie wir sie in Definition 1.13 definiert haben. Insbesondere notieren wir für eine Ecke v des Graphen mit w_v den trivialen Kantenzug von Länge 0 mit Anfangs- und Endpunkt v. Sind Anfangs- und Endpunkt klar, dann notieren wir w_v auch als leere Folge.

Definition 4.1. Sei $\Gamma = (V, E, \delta, \iota)$ ein Graph und $w = (e_1, \ldots, e_n)$ ein Kantenzug der Länge n (möglicherweise $n = 0$) mit Anfangspunkt $x = o(w)$ und Endpunkt $y = t(w)$.

i) w heißt *geschlossen*, falls $o(w) = t(w)$.

ii) w heißt *stachelfrei*, falls $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\} : e_{i+1} \neq \overline{e_i}$.

iii) w heißt *einfach*, falls w stachelfrei und $o(e_i) \neq o(e_j)$ und $t(e_i) \neq t(e_j)$ für $i \neq j$.

iv) w heißt *Kreis*, falls w einfach, geschlossen und nicht leer ist.

v) Γ heißt *kreisfrei*, falls es keine Kreise in Γ gibt.

vi) Es sei $\overline{w} := (\overline{e_n}, \ldots, \overline{e_1})$ der *inverse Kantenzug* zu w. Sind $w_1 = (e_1, \ldots, e_n)$ und $w_2 = (f_1, \ldots, f_m)$ (mit $n, m \geq 0$) zwei Kantenzüge mit $t(w_1) = o(w_2)$, dann sei $w_1 \cdot w_2 := w_1 w_2$ der Kantenzug $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m)$.

Nun kommen wir zur Definition von Bäumen.

Definition 4.2. Ein *Baum* ist ein nichtleerer, zusammenhängender, kreisfreier Graph.

Im Folgenden untersuchen wir einige Eigenschaften von Bäumen. Wir wollen zeigen, dass eine charakterisierend Eigenschaft ist, dass je zwei Ecken durch genau einen stachelfreien Kantenweg verbunden sind. Hierzu sehen wir zunächst die auf der Hand liegende Aussage, dass kreisfrei impliziert, dass alle stachelfreien Wege einfach sind.

Proposition 4.3. *Sei $\Gamma = (V, E)$ ein nichtleerer Graph.*

i) Ist w ein geschlossener, stachelfreier und nichtleerer Kantenzug in Γ, so enthält w einen Kreis.

ii) Γ ist genau dann ein Baum, wenn es zu je zwei Ecken u und v genau einen stachelfreien Weg $w_{u,v}$ von u nach v gibt.

Beweis. **i)** Ist w einfach, so ist w selbst ein Kreis.
Ist w nicht einfach, dann gibt es $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ und $o(i) = o(j)$ oder $t(i) = t(j)$. Wähle $i < j$ mit $|i - j|$ minimal. Im ersten Fall sei $\tilde{w} := (e_i, \ldots, e_{j-1})$ und im zweiten Fall $\tilde{w} := (e_{i+1}, \ldots, e_j)$. Der Kantenzug $\tilde{w}$ ist geschlossen, nicht leer wegen $j > i$, und einfach wegen der Minimalität von $|i - j|$. Somit ist $\tilde{w}$ ein Kreis.

ii) „$\Leftarrow$": Wir müssen zeigen, dass Γ ein Baum ist. Γ ist offensichtlich zusammenhängend und nach Voraussetzung nicht leer. Würde Γ einen Kreis w enthalten, dann wären w und der triviale Kantenzug $w_{o(w)}$ zwei stachelfreie Kantenzüge von $o(w)$ nach $o(w)$, was nach Voraussetzung nicht erlaubt ist. Somit ist Γ auch kreisfrei.
„$\Rightarrow$": Seien x und y in V. Da Γ zusammenhängend ist, gibt es einen Kantenzug w von x nach y. Falls $w = (e_1, \ldots, e_n)$ einen Stachel e_i, $e_{i+1} = \overline{e_i}$ hat, ist $w' := (e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n)$ ein Kantenzug kürzerer Länge von x nach y. Auf diese Weise bekommt man induktiv nach endlich vielen Schritten einen stachelfreien Weg von x nach y. Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen: Seien $w_1 = (e_1, \ldots, e_n)$ und $w_2 = (f_1, \ldots, f_m)$ zwei Wege von x nach y. Dann ist $w := w_1 \cdot \overline{w_2}$ ein geschlossener Weg. Wäre $e_n \neq f_m$, dann wäre w stachelfrei und enthielte nach i) einen Kreis. Somit folgt $e_n = f_m$ und induktiv $w_1 = w_2$. $\square$

Als Folgerung aus dieser Aussage bekommen wir beispielsweise, dass in einem Baum nach Wahl einer Ecke v_0 jeder nichttriviale Kantenweg eine natürliche Orientierung besitzt, denn einer der beiden Endpunkte ist echt näher an v_0 als der andere.

Korollar 4.4. *Ist w ein stachelfreier Kantenweg in einem Baum $\Gamma = (V, E)$ und $v_0 \in V$, so gilt:*

$$\begin{aligned} u_{v_0,t(w)} = u_{v_0,o(w)} \cdot w \text{ und } d(v_0, t(w)) &= d(v_0, o(w)) + l(w), \text{ oder} \\ u_{v_0,o(w)} = u_{v_0,t(w)} \cdot w \text{ und } d(v_0, o(w)) &= d(v_0, t(w)) + l(w). \end{aligned}$$

Ist $l(w) > 0$, so handelt es sich um ein exklusives Oder.

Beweis. Ist $n = 0$, $v_0 = o(w)$, oder $v_0 = t(w)$, so ist die Aussage offensichtlich richtig. Betrachte nun $n \geq 1$. Seien $u := o(w)$ und $v := t(w)$. Seien weiterhin e_1 die letzte Kante von $w_{v_0,u}$, e_2 die erste Kante von w und e_3 die letzte Kante von w. Ist $e_1 \neq \overline{e_2}$, dann ist der Kantenzug $w_{v_0,u} \cdot w$ stachelfrei und damit gilt $w_{v_0,v} = w_{v_0,u} \cdot w$. Ist hingegen $e_1 = \overline{e_2}$, so gilt wegen Proposition 4.3i) und der Kreisfreiheit von Γ, dass $e_1 \neq \overline{e_3}$, somit können wir analog zum vorherigen Fall schließen, dass $w_{v_0,u} = w_{v_0,v} \cdot w$. Die Aussage über die Längen und das exklusive Oder ergibt sich aus der Eindeutigkeit von stachelfreien Wegen mit festem Anfangs- und Endpunkt. □

Im Folgenden geben wir eine topologische Charakterisierung für die Eigenschaft, Baum zu sein.

Proposition 4.5. *Für einen nichtleeren Graphen $\Gamma = (V, E)$ gilt:*

$$\begin{aligned}\Gamma \textit{ ist ein Baum} &\Leftrightarrow \pi_1(\Gamma^{\mathrm{geom}}) \textit{ ist kontrahierbar} \\ &\Leftrightarrow \pi_1(\Gamma^{\mathrm{metr}}) \textit{ ist kontrahierbar} .\end{aligned}$$

Für den Beweis von Proposition 4.5 wird uns die folgende Aussage, die auf einem Übungsblatt bewiesen wird, helfen. Sie liefert eine nützliche Maschine, um Graphen auf einfachere Graphen zu kontrahieren.

Lemma 4.6. *Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph und $T = (V', E')$ ein Teilbaum von Γ. Bezeichne mit* der Kontraktion $\Gamma_1 := \Gamma/_T$ von Γ nach T *den Graphen mit der Eckenmenge E_1 und der Kantenmenge V_1, der wie folgt entsteht:*

- *$V_1 := V/\sim$, wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation ist, die erzeugt wird von: $\forall v_1, v_2 \in V' :\ v_1 \sim v_2$.*
- *$E_1 := E \backslash E'$.*

δ_1 und ι_1 seien die natürlichen von δ und ι induzierten Abbildungen durch Einschränkung auf E_1 und Projizieren via $V \to V_1$. v_0 sei die Ecke in Γ_1, die die Äquivalenzklasse jeder Ecke aus V' ist. Dann gilt für die Abbildung

$$h : \Gamma^{\mathrm{geom}} \to (\Gamma/_T)^{\mathrm{geom}},\ (t, e) \mapsto \begin{cases} (t, e), & \textit{falls } e \notin E' \\ v_0, & \textit{falls } e \in E' \end{cases},$$

dass h eine Homotopieäquivalenz ist.

Nun wenden wir uns dem Beweis von Proposition 4.5 zu.

Beweis. „$\Rightarrow$": Schreibe $X = \Gamma^{\mathrm{geom}}$. Wir müssen eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times X \to X$ finden, so dass $H(0,\cdot)$ konstant und $H(1,\cdot) = \mathrm{id}_X$ ist. Wähle $v_0 \in V$ und schreibe wie in Proposition 4.3 $w_{v_0,v}$ für den eindeutigen stachelfreien Weg von v_0 nach $v \in V$. Wir gehen wie folgt vor. Für jeden Punkt $x \in X$ gibt es einen eindeutigen längenerhaltenden Weg p_x von v nach x. Wir definieren H so, dass $H(t,x) = p(t \cdot d(v_0,x))$ ist.

1. Schritt: Definition von p_x für einen Punkt $x = (t,e)$: Nach Korollar 4.4 können wir e so wählen, dass $w_{v_0,t(e)} = w_{v_0,o(e)} \cdot (e)$. Dann ist $d_x := d(v_0,x) = l(w_{v_0,o(e)}) + t$. Schreibe $w_{v_0,o(e)} = (e_1,\dots,e_n)$, $e_{n+1} := e$ und jedes $s \in [0,d_x]$ als $s = k + \tilde{s}$ mit $k \in \{0,1,\dots,n\}$ und $\tilde{s} \in [0,1)$. Definiere nun

$$p_x : [0,d_x] \to X, s = k + \tilde{s} \mapsto (\tilde{s}, e_{k+1})$$

2.Schritt: Definiere nun H wie folgt:

$$H : [0,1] \times X \to X,\ (t,x) \mapsto p_x(t \cdot d_x).$$

Dann gilt für alle $x \in X$: $H(0,x) = p_x(0) = v_0$ und $H(1,x) = p_x(d_x) = x$. Außerdem ist H stetig und damit eine Kontraktion. H ist genauso stetig für Γ^{metr}, somit folgt auch die Kontrahierbarkeit von Γ^{metr}.

„$\Rightarrow$": Sei Γ^{geom} kontrahierbar. Damit ist Γ^{geom} zusammenhängend und somit auch Γ. Wir zeigen, dass in beliebigen Graphen der durch einen Kreis $w = (e_1,\dots,e_n)$ definierte geschlossene, lineare Weg γ_w nicht nullhomotop sein kann. Somit folgt aus $\pi_1(\Gamma^{\mathrm{geom}}) \cong \{1\}$, dass Γ kreisfrei ist.
Betrachte also einen solchen Kreis w. Wir wollen zunächst zeigen, dass wir uns auf den Fall $l(w) = 1$ beschränken können. Bilde dazu den Teilbaum $T := (V', E')$ von Γmit $V' := \{o(e_1),\dots,o(e_n)\}$ und $E' := \{e_1,\dots,e_{n-1}\}$. Nun gibt uns Lemma 4.6 die Homotopieäquivalenz $h : \Gamma^{\mathrm{geom}} \to \Gamma/_T{}^{\mathrm{geom}}$. Diese bildet w auf eine Schleife $\tilde{w}$ ab. h induziert als Homotopieäquivalenz auf den Fundamentalgruppen einen Isomorphismus. können wir also zeigen, dass $p_{\tilde{w}}$ in $\Gamma/_T{}^{\mathrm{geom}}$ nicht nullhomotop ist, dann stimmt das auch für γ_w in Γ^{geom}. Deshalb dürfen wir annehmen, dass w Länge 1 hat.
Sei also $w = (e)$ eine Schleife. Angenommen, es gäbe eine Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to \Gamma^{\mathrm{geom}}$, mit $\forall s \in [0,1] : H(0,s) = o(e) = t(e)$ und $H(1,s) = (s,e)$. Modiziere H zu einer Homotopie mit Bild in der Kante X_e wie folgt. Definiere: $\bar{H} : [0,1] \times [0,1]$ durch $\bar{H}(t,s) := H(t,s)$, falls $H(t,s) \in X_e$ und $\bar{H}(t,s) = o(e) = t(e)$ sonst. Dann ist $\bar{H}$ ebenfalls stetig und somit eine Homotopie zwischen γ_w durch die Schleife e und dem Punkt $o(e)$, die nur innerhalb der Schleife X_e passiert. Es ist aber $X_e \cong \mathrm{Circ}_1$ homöomorph zum Kreis und hat damit nichttriviale Fundmentalgruppe. Somit kann die Homotopie $\bar{H}$ nicht existieren. $\square$

Nun kehren wir zurück zu allgemeinen Graphen und definieren Quotienten von Graphen nach Gruppenaktionen. Dazu erinnern wir uns an die entsprechende Konstruktion für Mengen und topologische Räume.

Erinnerung: Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert. Dann heißt

$$G\backslash X := \{G \cdot x | g \in G\}$$

Quotient und die Abbildung $p : X \to G\backslash X, x \mapsto G \cdot x$ natürliche Projektion. Es gilt:

i) p ist G-invariant, das heißt $\forall g \in G, x \in X : p(g \cdot x) = p(x)$.

ii) Ist $f : X \to Y$ eine G-invariante Abbildung, dann gibt es genau eine Abbildung $\overline{f} : G\backslash X \to Y$ mit $\overline{f} \circ p = f$, nämlich $G \cdot x \mapsto f(x)$ (*UAE des Quotienten*)

iii) Ist X topologischer Raum, so wird $G\backslash X$ mit der Quotiententopologie zum topologischen Raum und es gilt die *topologische UAE* , das heißt die UAE aus ii), nur dass alle auftretenden Abbildungen stetig sind. Dadurch wird das Paar $(G\backslash X, p)$ schon bis auf Isomorphie bestimmt: das heißt für jedes andere Paar (Y, p'), das die topologische UAE erfüllt, gibt es einen Homöomorphismus $h : G\backslash X \to Y$ mit $h \circ p = p'$.

Nun können wir den Quotientenbegriff analog für Graphen einführen. Jedoch macht es Sinn, nur inversionsfreie Aktionen zuzulassen, da sonst kein e und $\overline{e}$ miteinander identifiziert werden müssten.

Definition 4.7. Sei $\rho : G \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$ eine inversionsfreie Aktion auf einem Graphen $\Gamma(V, E)$. Definiere den Graphen $G\backslash\Gamma$ durch:

- $V(G\backslash\Gamma) := G\backslash V(\Gamma) = \{G \cdot v|\, v \in V\}$.
- $E(G\backslash\Gamma) := G\backslash E(\Gamma) = \{G \cdot e|\, e \in V\}$.
- $o(G \cdot e) := G \cdot o(e),\ t(G \cdot e) := G \cdot t(e),\ \overline{G \cdot e} := G \cdot \overline{e}$

Beachte, dass $G\backslash\Gamma$ ein wohldefinierter Graph ist. Insbesondere gilt wegen der Inversionsfreiheit $\overline{G \cdot e} \neq G \cdot e$. $G\backslash\Gamma$ heißt *Quotientengraph* von Γ nach der Aktion ρ von G.

Wir zeigen nun einige erste Eigenschaften des Quotientengraphen, darunter insbesondere die entsprechende UAE in der Kategorie der Graphen.

Bemerkung 4.8. Sei $\rho : G \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$ eine inversionsfreie Aktion. Es gilt:

i) Die *natürliche Projektion* $p : \Gamma \to G\backslash\Gamma$ definiert durch $v \mapsto G \cdot v$ und $e \mapsto G \cdot e$ ist ein surjektiver Graphenmorphismus.

ii) p ist G-invariant, das heißt: $\forall g \in G : p \circ \rho(g) = p$.

iii) Ist $f : \Gamma \to \Gamma'$ ein G-invarianter Graphenmorphismus, so gibt es einen eindeutigen Graphenmorphismus $\overline{f} : G\backslash\Gamma \to \Gamma'$ mit $\overline{f} \circ p = f$.

iv) Die induzierte Abbildung p^{geom} ist stetig, offen und G-invariant.

v) $(G\backslash\Gamma)^{\text{geom}}$ ist natürlich homöomorph zu $G\backslash\Gamma^{\text{geom}}$

Beweis. i) und ii) folgen direkt aus den Definitionen. Für iii) setze $\overline{f}(G\cdot v) := f(v)$ und $\overline{f}(G\cdot e) := f(e)$. Bei iv) ist die Stetigkeit und G-Invarianz klar. Für die Offenheit der Abbildung betrachte eine offene Menge U in Γ^{geom}. Somit gilt für alle $e \in E$, dass $U \cap X_e$ offen ist, also $U \cap X_e = V_e \times \{e\}$ mit V_e offen in dem Intervall $[0, 1]$. Es ist

$$p^{\text{geom}}(U) \cap X_{G\cdot e} = \bigcup_{g\in G} p^{\text{geom}}(U \cap X_{g\cdot e}) = \bigcup_{g\in G} V_{g\cdot e} \times \{G \cdot e\}$$

Somit ist $p(U)$ Vereinigung offener Menge und damit offen.
Um schließlich iv) einzusehen, zeigen wir, dass $((G\backslash\Gamma)^{\text{geom}}, p^{\text{geom}})$ die topologische UAE des Quotienten erfüllt. Sei dazu $f : \Gamma^{\text{geom}} \to Y$ eine G-invariante Abbildung. Die Abbildung $\overline{f} : (G\backslash\Gamma)^{\text{geom}} \to Y, (t, G \cdot e) \mapsto f(t, e)$ erfüllt $\overline{f} \circ p = f$ und ist eindeutig mit dieser Eigenschaft. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\overline{f}$ stetig ist. Dies folgt weil p offen und surjektiv ist. Damit gilt für offenes U in Y: $\overline{f}^{-1}(U) = p^{\text{geom}}(f^{-1}(U))$ ist offen in Γ^{geom}. □

Beispiel 4.9. Es folgen einige Beispiele für Quotienten von Graphen nach Gruppenaktionen.

i) Auf $\Gamma = \Gamma(\mathbb{Z}, \{1\})$ operiert $\mathbb{Z}$ auf den Ecken durch $z \mapsto z + n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dies definiert eine Aktion von $\mathbb{Z}$ auf Γ und es gilt für diese Aktion $\mathbb{Z}\backslash\Gamma \cong \text{Circ}_n$.

ii) Ist $\Gamma = \Gamma(G, S)$ ein Cayleygraph mit der Aktion von G durch Linksmultiplikation darauf, so ist $G\backslash\Gamma$ eine Rose mit $|S|$ Blättern.

iii) Sei Γ der Graph mit zwei Ecken A und B und zwei geometrischen Kanten von A nach B. Auf Γ operiert $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ durch Vertauschen der beiden Kanten und Fixieren der beiden Ecken. Dann ist $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\backslash\Gamma$ ein Graph mit 2 Ecken und einer Kante dazwischen.

Zum Abschluss dieses Abschnitts werden wir zeigen, dass jeder Graph als universelle Überlagerung einen Baum hat. Dazu erinnern wir zunächst an den Begriff Überlagerung und einige grundlegende Eigenschaften.

Erinnerung: Seien X und Y topologische Räume und $p : Y \to X$ eine surjektive stetige Abbildung.

i) p heißt *unverzweigte Überlagerung*, falls gilt: für alle $x \in X$ gibt es eine Umgebung V, so dass $p^{-1}(V) = \coprod_{i \in I} U_i$ und für alle $i \in I$ ist $p|_{U_i}$ ein Homöomorphismus aufs Bild.

ii) Ist $p : Y \to X$ eine unverzweigte Überlagerung, so bezeichnen wir mit $\mathrm{Deck}(Y/X) := \{f : Y \to Y |\ p \circ f = f\}$ die *Gruppe der Decktransformationen* oder auch *Galoisgruppe* der Überlagerung p.

iii) Eine unverzweigte Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ heißt *universelle Überlagerung*, falls $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist, das heißt falls $\pi_1(\tilde{X}) = \{1\}$ ist.

iv) Ist X zusammenhängend, lokal wegzusammenhängen und semilokal einfach zusammenhängend, dann gibt es eine universelle Überlagerung $u : \tilde{X} \to X$ und alle universellen Überlagerungen sind isomorph zueinander. Darüberhinaus ist $\mathrm{Deck}(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X)$.

v) **UAE**: Für alle Überlagerungen $q : Y \to X$ gibt es eine Überlagerung $u_1 : \tilde{X} \to Y$ mit $u = q \circ u_1$.

vi) **Liftungseigenschaft:** Ist $p : Y \to X$ eine unverzweigte Überlagerung, $f : Z \to X$ eine stetige Abbildung von einem wegzusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden Raum Z, und $y \in Y$ und $z \in Z$ mit $p(y) = f(z)$, so gibt es genau eine stetige Abbildung $\hat{f} : Z \to Y$ mit $p \circ \hat{f} = f$ und $\hat{f}(z) = y$. Die Abbildung $\hat{f}$ heißt *Lift von f via p*.

Proposition 4.10. *Eine unverzweigte Überlagerungen der geometrischen Realisierung eines Graphen ist auf natürliche Weise selbst wieder ein Graph, das heißt: Ist $\Gamma = (V, E)$ ein Graph, $X := \Gamma^{\mathrm{geom}}$ und $p : Y \to X$ eine unverzweigte Überlagerung, dann gilt:*

i) Es gibt einen Graphen $\hat{\Gamma}$, einen Graphenmorphismus $q : \hat{\Gamma} \to \Gamma$, und einen Homöomorphismus $f : \hat{\Gamma}^{\mathrm{geom}} \to Y$ mit $p \circ f = q^{\mathrm{geom}}$.

ii) $(\hat{\Gamma}, q)$ ist bis auf Isomorphie eindeutig.

Beweis. Wir führen zunächst einige Notationen ein. Im folgenden sei $x = (t, e)$ ein beliebiger Punkt in X.

- Definiere den Weg $\gamma_{e,t} : [0, t] \to X, t \mapsto (t, e)$. Es ist also der Anfangspunkt von $\gamma_{e,t}$ gleich $o(e)$ und der Endpunkt gleich x. Es sei $\gamma_e := \gamma_{e,1}$.

- Es bezeichne $\overline{\gamma_{e,t}}$ den zu $\gamma_{e,t}$ inversen Weg von x nach $o(e)$. Für ein Urbild $y \in Y$ von x unter p bezeichne γ_y^e den Lift von $\overline{\gamma_{t,e}}$ in y. Der Weg γ_y^e hat also als Anfangspunkt y und als Endpunkt ein Urbild der Ecke $o(e)$.

- Für einen Punkt $\hat{v} \in Y$ mit $p(\hat{v}) = v = o(e)$, sei $\gamma_{\hat{v},e} : [0, 1] \to Y$ der Lift von $\gamma_e : [0, 1] \to X$ im Punkt $\hat{v}$.

Nun definieren wir den Graphen $\hat{\Gamma} = (\hat{V}, \hat{E})$ wie folgt:

- $\hat{V} := p^{-1}(V)$

- $\hat{E} := \{\gamma_{\hat{v},e} |\ \hat{v} \in \hat{V}, e \in E \text{ mit } o(e) = p(\hat{v})\}$.

- $\iota(\gamma_{\hat{v},e}) := \gamma_{\hat{w},\bar{e}}$, wobei $\hat{w} := \gamma_{\hat{v},e}(1)$, $o(\gamma_{\hat{v},e}) = \hat{v}$ und $t(\gamma_{\hat{v},e}) = \hat{w}$.

Definiere weiterhin $q : \hat{\Gamma} \to \Gamma$, durch $\hat{v} \mapsto p(\hat{v})$ und $\gamma_{\hat{v},e} \mapsto e$.
Dann ist $\hat{\Gamma} = (\hat{V}, \hat{E})$ ein Graph und q ein Graphenmorphismus. Definiere die beiden Abbildungen:

$$\begin{aligned} f :&\quad \hat{\Gamma}^{\text{geom}} \to Y, (t, \gamma_{\hat{v},e}) \mapsto \gamma_{\hat{v},e}(t) \\ g :&\quad Y \to \hat{\Gamma}^{\text{geom}}, y \mapsto (t, \gamma_{\hat{v},e}) \text{ mit } p(y) = (t, e) \text{ und } \hat{v} = \gamma_y^e(t) \end{aligned}$$

Beachte: $\gamma_y^e(t)$ ist Lift von dem Kantenstück von $p(y)$ nach $o(e)$ in y.

Überprüfe, dass $f \circ g = \text{id}$, $g \circ f = \text{id}$ und f und g stetig sind. Dann folgt die Behauptung. Die Eindeutigkeit folgt direkt aus der Konstruktion. □

Dank Proposition 4.10 können wir nun die universelle Überlagerung eines Graphen in der Kategorie der Graphen definieren.

Definition 4.11. Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph. Es sei $\tilde{\Gamma}^{\text{geom}}$ die universelle Überlagerung von Γ^{geom} und $\tilde{\Gamma}$ der nach Proposition 4.10 zugehörige Graph. Wir bezeichnen $\tilde{\Gamma}$ als *universelle Überlagerung* von Γ.

Theorem 2. *i) Die universelle Überlagerung eines Graphen ist ein Baum.*

ii) Jeder Graph Γ ist Quotient eines Baumes nach der Gruppe $\pi_1(\Gamma^{\text{geom}})$.

Beweis. **i)** Sei $\tilde{\Gamma}$ die universelle Überlagerung. Nach Definition von universeller Überlagerung gilt $\pi_1(\tilde{\Gamma}^{\text{geom}}) = \{1\}$ und somit ist nach Proposition 4.5 $\tilde{\Gamma}$ ein Baum.

ii) Dies folgt nun direkt aus den Sätzen über die universelle Überlagerung bei topologischen Räumen. □

Obwohl Graphen auf den ersten Blick mathematisch einfach zugänglich erscheinen, gibt es auch in diesem Bereich zahlreiche offene Fragen, die bis heute nicht beantwortet werden konnten. Wir schließen das Kapitel mit einem Beispiel aus dem Kontext von Cayleygraphen ab. Bei dem im Folgenden vorgestellten Problem sind Cayleygraphen als kombinatorische Graphen definiert wie in und vor Bemerkung 2.3 beschrieben.

Offenes Problem 1 (Hamiltonkreisproblem)**.** Ein Graph heißt *Hamiltongraph*, falls er einen *Hamiltonkreis* enthält, also einen Kreis, der jede Ecke genau einmal enthält. Ist jeder Cayleygraph ein Hamiltongraph?
Die sogar stärkere Vermutung, dass bis auf wenige Ausnahmen alle zusammenhängenden Graphen, deren Automorphismengruppe transitiv auf den Ecken operiert, einen Hamiltonkreis enthalten, wird häufig dem ungarischen Mathematiker László Lovász zugeordnet und ist auch unter dem Namen *Lovász-Vermutung* bekannt. Genauer stellte dieser 1969 eigentlich als offenes Forschungsproblem die Aufgabe, einen Graphen zu konstruieren, der die Vermutung widerlegen würde. Eine Zusammenfassung unterschiedlicher Teilergebnisse zu der Vermutung findet sich beispielsweise in [**?**].

Kapitel II

Endlich erzeugte Gruppen

In diesem Kapitel stellen wir endlich erzeugte Gruppen vor. Dazu erinnern wir zunächst an freie Gruppen, die die Grundbausteine in dieser Theorie sind. Wir sehen dann, dass jede Gruppe Quotient einer freien Gruppe ist, und führen schließlich Gruppenpräsentationen ein. Auf diese Weise haben wir eine handfeste Beschreibungsart für jede beliebige Gruppe. Kehrseite der Medaille ist, dass sich aus der Gruppenpräsentation meist wenig über die Gruppe ablesen lässt. Schon anhand Gruppenpräsentationen zu entscheiden, ob eine Gruppe endlich oder vielleicht sogar trivial ist oder ob zwei Gruppen isomorph sind, ist häufig nicht möglich. Andererseits erhalten wir dank Gruppenpräsentationen als natürliche Konstruktionen das freie Produkt und das amalgamierte Produkt. Diese entsprechen auf gruppentheoretischer Seite dem Verkleben von topologischen Räumen. Der Satz von Seifert und van Campen stellt diesen Bezug her. Damit können wir die Fundamentalgruppen von vielen Räumen, insbesondere auch von der geschlossenen Fläche von Geschlecht g, berechnen. Schließlich untersuchen wir eine ganze Reihe an Beispielen, darunter die sogenannte Zopfgruppe und die Abbildungsklassengruppe. Wir beenden das Kapitel mit den drei klassischen Problemen der kombiatorischen Gruppentheorie die auf Dehn zurückgehen, dem Wortproblem, dem Konjugationsproblem und dem Isomorphieproblem.

1 Freie Gruppen

Ziele dieses Abschnitts:

- Erinnerung an freie Gruppen und ihre UAE
- Ein Cayleygraph $\Gamma(G, S)$ ist genau dann frei, wenn die Gruppe G frei

ist und S ein freies Erzeugendensystem von G ist.

Erinnerung 1.1. Sei X eine Menge. Dann sei

i) $W(X) := \{x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} | n \geq 0, x_i \in X, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}\}$ die *Menge der Wörter über* X. Beachte, dass wir also für jedes $x \in X$ einen zusätzlichen Buchstaben x^{-1} eingeführt haben. Es gilt insbesondere per Definition $X \cup X^{-1} = \emptyset$.

ii) $F(X) := \{w = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} \in W(X) | x_i \neq x_{i+1}^{-1}$ die Menge der *reduzierten Wörter über* X.

iii) Für $w \in W(X)$ bezeichnen wir mit $\operatorname{red}(w)$ das reduzierte Wort, das aus w durch sukzessives Streichen aller Teilwörter der Form xx^{-1} und $x^{-1}x$ entsteht. Das Wort $\operatorname{red}(w)$ ist unabhängig von der Reihenfolge des Kürzens. (!)

iv) Nun können wir auf $W(X)$ die beiden folgenden Verknüpfungen definieren: Sein $w_1 = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ und $w_2 = y_1^{\eta_1} \dots y_m^{\eta_m}$. Dann sei

$$w_1 \star w_2 := x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_1} y_1^{\eta_1} \dots y_m^{\eta_m} \text{ und } w_1 \cdot w_2 := \operatorname{red}(w_1 \star w_2).$$

Es sei 1 das leere Wort. Dies ist sowohl in $W(X)$ als auch in $F(X)$ enthalten. Weiter können wir für $w = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ das *inverse Wort* $w^{-1} := x_n^{-\varepsilon_n} \dots x_1^{-\varepsilon_1}$ bilden. Die Verknüpfung $\cdot$ schränkt sich auf $F(X)$ ein und wir haben folgende Eigenschaften:

a) $(F(X), \cdot)$ ist Gruppe mit neutralem Element 1 und mit dem inversen Element w^{-1} für jedes $w \in F(X)$.

b) Es gilt die folgende **UAE**: Ist G eine Gruppe und $f : X \to G$ eine Abbildung, so gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : F(X) \to G$ mit der Eigenschaft $\forall x \in X : \ \varphi(x) = f(x)$, nämlich: $\varphi : x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} \mapsto f(x_1)^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot f(x_n)^{\varepsilon_n}$.

c) Erfüllt eine Gruppe F die UAE aus b), dann ist F eine freie Gruppe über der Basis X.

d) Es ist $F(X)$ genau dann isomorph zu $F(Y)$, wenn X und Y gleichmächtig sind, das heißt wenn es eine Bijektion von X nach Y gibt. Insbesondere sind also für $n \in \mathbb{N}$ alle freien Gruppen über Mengen mit n Elementen isomorph zueinander und wir schreiben auch $F_n := F(x_1, \dots, x_n)$.

Beispiel 1.2. Wir erhalten die folgenden freien Gruppen für die leere Menge, eine einelementige Menge und eine zweielementige Menge:

i) $X = \emptyset \Rightarrow F(X) \cong \{1\} \cong F_0$.

ii) $X = \{x\} \Rightarrow \quad F(X) \cong \mathbb{Z} \cong F_1$.

iii) $X = \{x, y\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(X) = & \{ 1, x, y, x^{-1}, y^{-1}, xx, xy, xy^{-1}, yx, yy, yx^{-1}, x^{-1}x^{-1}, \\ & x^{-1}y, x^{-1}y^{-1}, y^{-1}x, y^{-1}x^{-1}, y^{-1}y^{-1}, xxx, \ldots\} \\ \cong & F_2 \end{aligned}$$

In der freien Gruppe lässt sich also jedes Element auf eindeutige Art und Weise als reduziertes Produkt der Erzeuger darstellen. Dies entspricht der Eigenschaft, dass es im Cayleygraphen zwischen je zwei Ecken einen eindeutigen stachelfreien Weg gibt. Dies beweisen wir in der folgenden Proposition.

Proposition 1.3. *Sei G eine Gruppe und $S \subseteq G$ eine Teilmenge. Dann gilt:*

$$G \cong F(S) \Leftrightarrow \textit{Der Cayleygraph } \Gamma(G, S) \textit{ ist ein Baum.}$$

Beweis. Sei $\Gamma := \Gamma(G, S)$ der zu G und S gehörende Cayleygraph, $V := V(\Gamma)$ die Eckenmenge von Γ und $E := E(\Gamma)$ die Kantenmenge von Γ.

„$\Rightarrow$": Ist $G \cong F(S)$, dann ist Γ nicht leer, denn mindestens id ist in V. Weiterhin ist Γ zusammenhängend, da S ein Erzeugendensystem ist (nach I.Proposition 2.2). Es bleibt noch zeigen, dass Γ kreisfrei ist. Wir nehmen also an, es gäbe einen Kreis $w = (e_1, \ldots, e_n)$ in Γ. Somit gilt insbesondere $o(e_1) = o(w) = t(w) = t(e_n)$ und $n \geq 1$. Nach Definition des Cayleygraphen gilt für jede Kante e_i mit Anfangspunkt g: $e_i = g \times s_i \in \mathrm{E}_+ = G \times S$ für ein $s_i \in S$, oder die Gegenkante $\overline{e_i} \in \mathrm{E}_+ = G \times S$. Im ersten Fall hat e_i als Endpunkt $g \cdot s_i$. Im zweiten Fall hat $\overline{e_i}$ als Endpunkt g und es ist $\overline{e_i} = g \cdot s_i^{-1} \times s_i$ für ein $s_i \in S$; e_i hat dann als Endpunkt $g \cdot s_i^{-1}$. Insgesamt gilt also

$$t(e_i) = g \cdot s_i^{\varepsilon_i} \text{ mit } \begin{cases} \varepsilon_i = 1, \text{ falls } e_i \in \mathrm{E}_+ \\ \varepsilon_i = -1, \text{ falls } e_i \in \overline{\mathrm{E}_+} \end{cases}$$

Da Anfangs- und Endpunkt von w übereinstimmen gilt folglich für $g := o(w)$:

$$g = o(w) = t(w) = g \cdot s_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot s_n^{\varepsilon_n}$$

und somit $h := s_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot s_n^{\varepsilon_n} = 1$. Aus der Stachelfreiheit von w folgt, dass h reduziert ist, denn es gilt:

$$s_i = s_{i+1} \text{ und } \varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1} \Leftrightarrow e_i = \overline{e_{i+1}} \tag{1.1}$$

Da w stachelfrei ist, ist also h reduziertes Wort von Länge $n \geq 1$. Also gilt $h \neq 1$ und wir haben einen Widerspruch.

„⇐“: Sei nun umgekehrt gegeben, dass Γ ein Baum ist. Da Γ zusammenhängend ist, verrät uns nun I.Proposition 2.2 umgekehrt, dass S ein Erzeugendensystem ist. Aus der UAE der freien Gruppe folgt, dass die Abbildung $f : S \to G, s \mapsto s$ sich zu einem Gruppenhomomorphismus $\varphi : F(S) \to G$ fortsetzt. Da S Erzeugendensystem, ist dieser surjektiv. Bleibt noch zu zeigen, dass φ injektiv ist. Sei dazu $v = s_1^{\varepsilon_1} \dots s_n^{\varepsilon_n}$ ein beliebiges Element in $F(S)$, dass in Kern(φ) liegt. Es gilt also $s_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot s_n^{\varepsilon_n} = 1_G$. Betrachte den Weg $w = (e_1, \dots, e_n)$, der wie folgt definiert ist:

$$e_1 \quad := \quad \begin{cases} (1, s_1) \in \mathrm{E}_+, \text{ falls } \varepsilon_1 = 1 \\ \overline{(s_1^{-1}, s_1)} \in \overline{\mathrm{E}_+}, \text{ falls } \varepsilon_1 = -1 \end{cases} \qquad \text{und}$$

$$e_k \quad := \quad \begin{cases} (t(e_{k-1}), s_k) \in \mathrm{E}_+, \text{ falls } \varepsilon_k = 1 \\ \overline{(t(e_{k-1}) \cdot s_k^{-1}, s_k)} \in \overline{\mathrm{E}_+}, \text{ falls } \varepsilon_k = -1 \end{cases} \qquad \text{für } k \geq 2.$$

Dann gilt $t(w) = o(w) \cdot s_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot s_n^{\varepsilon_n} = o(w) \cdot 1 = o(w)$. Also ist w geschlossener Weg. Aus Gleichung (1.1) folgt, dass w stachelfrei ist. Aus Proposition 4.3 folgt, dass w einen Kreis enthält oder Länge 0 hat. Da Γ ein Baum ist, muss also $n = 0$ gelten und damit $v = 1$. Insgesamt ist Kern φ also trivial. □

Somit haben wir nun mit den freien Gruppen eine sehr spezielle Klasse von Gruppen kennengelernt. Als Nächstes wollen wir untersuchen, welche weiteren Gruppen wir mit freien Gruppen als Bausteinen basteln können. Welche Gruppen mögen wohl als Untergruppen von freien Gruppen auftreten und was bekommen wir als Quotientengruppen? Dies werden wir in Abschnitt 2 beantworten.

2 Gruppenpräsentationen

Ziele dieses Abschnitts:

- Kennenlernen von Gruppenpräsentationen.
- Jede Gruppe ist Quotient einer freien Gruppen.
- Kennenlernen des freien Produkts und des amalgamierten Produkts. Anwendungen auf Fundamentalgruppen: der Satz von Seifert und van Kampen.
- Wie sehen Untergruppen von freien Gruppen aus? Der Satz von Nielsen und Schreier

Zunächst erinnern wir uns daran, dass aus der UAE der freien Gruppe folgt, dass jede Gruppe Quotient einer freien Gruppe ist.

Proposition 2.1. *Jede Gruppe G ist Quotient einer freien Gruppe $F(X)$, das heißt es gibt einen Normalteiler N in $F(X)$ mit $G \cong F(X)/N$.*

Beweis. Sei S ein Erzeugendensystem von G. Zum Beispiel kann $S = G$ gewählt werden. Wähle $X := S$. Sei $f : S \to G$ die Abbildung, die definiert ist durch $s \mapsto s$. Aus der UAE der freien Gruppe folgt, dass sich f zu einem Gruppenhomomorphismus $\varphi : F(X) \to G$ fortsetzen lässt. Da S ein Erzeugendensystem ist, ist φ surjektiv. Aus dem Homomorphiesatz folgt, dass $G \cong F(X)/N$ mit $N = \mathrm{Kern}(\varphi)$. □

Als erstes Beispiel wollen wir $\mathbb{Z}^2$ betrachten.

Beispiel 2.2. Sei $G = \mathbb{Z}^2$ und $S = \{b_1 := \binom{1}{0}, b_2 := \binom{0}{1}\}$. Dann ist S Erzeugendensystem. Der Homomorphismus $\varphi : F(x,y) \to \mathbb{Z}^2$, der von der Abbildung $x \mapsto b_1, y \mapsto b_2$ induziert wird, berechnet sich als:

$$\varphi : F(x,y) \to \mathbb{Z}^2, w \mapsto \begin{pmatrix} \sharp_x(w) \\ \sharp_y(w) \end{pmatrix}$$

Hierbei seien für $w = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ mit $x_i \in \{x, y\}$ und $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ die beiden Zahlen $\sharp_x(w) := \sum_{x_i = x} \varepsilon_i$ und $\sharp_y(w) := \sum_{x_i = y} \varepsilon_i$ die *Anzahl der x bzw. der y in w jeweils mit Vorzeichen gezählt.*
Also ist $\mathbb{Z}^2 \cong F_2/N$ mit

$$N := \mathrm{Kern}(\varphi) = \{w \in F(x,y) |\ \sharp_x(w) = 0, \sharp_y(w) = 0\}.$$

Um nun Gruppen, die wir als solch einen Quotienten gegeben haben, möglichst einfach zu beschrieben, möchten wir Normalteiler N mit möglichst wenig Aufwand anwenden können. Eine Möglichkeit ist es, Erzeuger von N anzugeben. Hierzu genügt es, Elemente anzugeben, die N als Normalteiler erzeugen, das heißt N ist der kleinste Normalteiler, der diese Elemente enthält.

Definition 2.3. Sei G eine Gruppe und $R \subseteq G$

i) Dann heißt

$$<< R >> := \{\prod_{i=1}^{n} g_i r_i g_i^{-1} | g_i \in G, r_i \text{ oder } r_i^{-1} \in R\}$$

der *von R erzeugte Normalteiler in G.*

ii) Ist $G \cong F(X)/N$ und $N = << R >>$, dann heißt $< X|R >$ *Präsentation von* G. Schreibe auch $G =< X|R >$. Verwende weiterhin folgende Notationen:

$$\begin{aligned} G &= < x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_k > \\ &:= < \{x_1, \dots x_n\} | \{r_1, \dots, r_k\} > \text{ und} \\ G &= < x_1, \dots, x_n | w_1 = w'_1, \dots w_k = w'_k > \\ &:= < x_1, \dots, x_n | w_1 {w'_1}^{-1}, \dots w_k {w'_k}^{-1} > \end{aligned}$$

Bemerkung 2.4. Für $R \subseteq G$ ist $N :=<< R >>$ der kleinste Normalteiler in G, der R enthält, das heißt jeder weitere Normalteiler H, der R enthält, enthält auch N.

Beweis. Es gilt $R \subseteq N$. N ist offensichtlich eine Untergruppe von G. Außerdem ist N sogar ein Normalteiler, denn für $h = \prod_{i=1}^n g_i r_i g_i^{-1} \in N$ und $g \in G$ gilt:

$$ghg^{-1} = g(\prod_{i=1}^n g_i r_i g_i^{-1})g^{-1} = \prod_{i=1}^n (gg_i) r_i (gg_i)^{-1} \in N$$

Somit ist N ein Normalteiler, der R enthält.
Sei nun H ein weiterer Normalteiler, der R enthält. Somit gilt für jedes $r \in R$: $r \in H$. Dann gilt aber wegen der Normalteilereigenschaft von H auch $r^{-1} \in H$ und weiterhin $\forall g \in G : grg^{-1} \in H$ und $gr^{-1}g^{-1} \in H$. Somit folgt, dass beliebige Elemente aus N in H liegen und wir haben $N \subseteq H$. □

Im Folgenden lernen wir erste Beispiele für Gruppenpräsentationen kennen.

Beispiel 2.5. Die beiden Gruppen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}^k$ können wie folgt präsentiert werden.

i) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong < x | \, x^n >$

ii) $$\begin{aligned} \mathbb{Z}^k &\cong < x_1, \dots, x_k | \, x_i x_j = x_j x_i \; \forall i, j \in \{1, \dots, k\} > \\ &\cong < x_1, \dots, x_k | \, [x_i, x_j] \; \forall i, j \in \{1, \dots, k\} > \end{aligned}$$

Hierbei ist $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ der *Kommutator* von zwei Elementen a und b.

Beweis. **i)** Betrachte die Abbildung $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ induziert von $1 \mapsto \overline{1}$. Es ist Kern$(\varphi) = n\mathbb{Z} = < n > = << n >>$. Identifiziere nun $F(x)$ mit $\mathbb{Z}$ via dem Isomorphismus, der von $x \mapsto 1$ induziert wird. Dann wird φ induziert von $x \mapsto \overline{1}$ und es ist Kern$(\varphi) = << x^n >>$.

Somit gilt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong F(x)/ << x^n >>$.

ii) Seien $\varphi : F(x_1, \dots, x_k) \to \mathbb{Z}^k$ der und $N := \text{Kern}(\varphi)$ wie in Beispiel 2.2 definiert. Wir müssen also zeigen:

$$N = << \{[x_i, x_j] |\ i, j \in \{1, \dots, k\}\ \} >>$$

Da $\varphi([x_i, x_j]) = 0$, gilt bereits $N \subseteq \text{Kern}(\varphi)$. Nach Homomorphiesatz steigt φ ab zu einem Homomorphismus $\overline{\varphi} : F(x_1, \dots, x_k)/N \to \mathbb{Z}^k$. Wir müssen nun zeigen, dass $\overline{\varphi}$ ein Isomorphismus ist, dann gilt $N = \text{Kern}(\varphi)$. Nun gilt:

- $\overline{\varphi}$ ist surjektiv, da bereits φ surjektiv ist.
- Die Gruppe $G := F(x_1, \dots, x_k)/N$ wird von den Bildern $\overline{x_1}$, …, $\overline{x_k}$ von x_1, …x_k erzeugt. Nach Definition von N vertauschen diese, das heißt es gilt $\overline{x_i} \cdot \overline{x_j} = \overline{x_j} \cdot \overline{x_i}$. Insbesondere ist G damit abelsch und jedes Element $\overline{w}$ aus G kann geschrieben werden als $\overline{x_1}^{a_1} \cdot \overline{x_2}^{a_2} \cdot \ldots \cdot \overline{x_k}^{a_k}$ mit $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$.
- Ist $\overline{w}$ nun in $\text{Kern}(\overline{\varphi})$, dann ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{\varphi}(\overline{w}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$$

  Somit gilt $a_1 = \ldots = a_k = 0$ und $\overline{w} = 1_G$. Also ist $\overline{\varphi}$ auch injektiv.

Es folgt, dass $\overline{\varphi}$ ein Isomorphismus ist und damit insgesamt, dass $N = \text{Kern}(\varphi)$. □

Gruppenpräsentationen ermöglichen es uns nun auf einfache Weise explizit Gruppen zu definieren. Es folgen einige Beispiele.

Beispiel 2.6. Im Folgenden geben wir sieben Gruppen durch eine Gruppenpräsentation an.

i)
$$G_1 =< x, y |\ x^n, y^2, xyxy >$$

ii)
$$G_2 =< x, y |\ x^4, x^2y^{-2}, xyxy^{-1} >$$

iii)

$$G_3 = \left\langle x_1, \ldots, x_n | \begin{array}{l} x_i x_j = x_j x_i, \text{ falls } j \neq i \pm 1, i, j \in \{1, \ldots, n\}, \\ x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1} \text{ für } i \in \{1, \ldots, n\} \end{array} \right\rangle$$

iv)

$$G_4 = \left\langle x_1, \ldots, x_n | \begin{array}{l} x_i^2 = 1 \text{ für } i \in \{1, \ldots, n\}, \\ x_i x_j = x_j x_i, \text{ falls } j \neq i \pm 1, i, j \in \{1, \ldots, n\} \\ x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1} \text{ für } i \in \{1, \ldots, n\} \end{array} \right\rangle$$

v)

$$G_5 =< x, y |\ x^2 = y^3, xyx = yxy >$$

vi)

$$G_6 =< x_1, x_2, x_3, x_4 |\ [x_1, x_2] \cdot [x_3, x_4] = 1 >$$

Welche Gruppen verbergen sich wohl hinter diesen Präsentationen? Sind sie endlich? Vielleicht sogar trivial? Haben sie zumindest Elemente endlicher Ordnung?
Wir machen einige erste Beobachtungen: Beispielsweise ist G_4 ein Quotient von G_3 und G_1, G_2 und G_4 enthalten offensichtlich Elemente endlicher Ordnung. Darüber hinaus sehen wir aber schnell, dass wir aus den Gruppenpräsentationen kaum Eigenschaften der Gruppe selbst ablesen können. Wir werden im Verlaufe vom nächsten Abschnitt einige dieser Gruppen genauer kennen lernen. Als kleiner Vorgriff sei schon mal verraten: drei der angegebenen Gruppen sind endlich.

Zunächst führen wir jedoch ein sehr hilfreiches Werkzeug ein, um aus durch Gruppenpräsentationen gegebenen Gruppen neue Gruppen zu konstruieren: das freie Produkt und das amalgamierte Produkt. Diese Konstruktion kommt in natürlicher Weise bei der Berechnung von Fundamentalgruppen vor, wie wir anschließend sehen werden.

Definition 2.7. Seien $G_1 =< X_1 |\ R_1 >$ und $G_2 =< X_2 |\ R_2 >$ Gruppenpräsentationen.

i) $G_1 \star G_2 :=< X_1 \cup X_2 |\ R_1 \cup R_2 >$ heißt freies Produkt von G_1 und G_2.

ii) Sei weiterhin eine Gruppenpräsentation $U =< Y| \ S >$ einer dritten Gruppe U gegeben zusammen mit zwei Gruppenhomomorphismen $\alpha_1 : U \to G_1$ und $\alpha_2 : U \to G_2$.

$$G_1 \star_U G_2 :=< X_1 \cup X_2| \ R_1 \cup R_2 \cup \{\alpha_1(y) = \alpha_2(y)| \ y \in Y\} >$$

heißt *amalgamiertes Produkt von G_1 und G_2 bezüglich α_1 und α_2.*

Eine wichtige Eigenschaft des freien Produkts ist, dass sich die beiden Gruppen, aus denen es gebildet wird, darin als Untergruppen wiederfinden. Außerdem sollte es natürlich tunlichst unabhängig von den gewählten Präsentationen sein. Diese Eigenschaften werden wir im Folgenden zeigen.

Proposition 2.8. *Das freie Produkt hat folgende Eigenschaften.*

i) Wir erhalten natürliche Einbettungen

$$i_1 : G_1 \to G_1 \star G_2 \text{ und } i_2 : G_2 \to G_1 \star G_2.$$

ii) $G_1 \star G_2$ hängt von den gewählten Präsentationen nur bis auf Isomorphie ab.

iii) $G_1 \star G_2$ erfüllt die folgende universelle Abbildungseigenschaft: Sind $\varphi_1 : G_1 \to G$ und $\varphi_2 : G_2 \to G$ Gruppenhomomorphismen in eine weitere Gruppe G, so gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : G_1 \star G_2 \to G$ mit $\varphi \circ i_1 = \varphi_1$ und $\varphi \circ i_2 = \varphi_2$.

Beweis. i) Wir definieren zunächst den Homomorphismus

$$\hat{i}_1 : F(X_1) \to G_1 \star G_2 = F(X_1 \cup X_2)/ << R_1 \cup R_2 >>$$

durch $x_i \mapsto \bar{x}_i$, wobei $\bar{x}_i$ die Klasse von x_i in der Faktorgruppe ist.
Es gilt: $w \in R_1 \Rightarrow \hat{i}_1(w) = 0$. Somit steigt $\hat{i}_1$ ab zu einem Homomorphismus

$$i_1 : G_1 \ = \ F(X_1)/ << R_1 >> \ \to \ \ G_1 \star G_2.$$

Es gilt: $i_1(w) = 0 \Rightarrow \hat{i}_1(w) \in << R_1 \cup R_2 >> \ \cap F(X_1) \ = << R_1 >>$. Also ist i_1 injektiv. Der Homomorphismus i_2 wird analog definiert.

iii) Definiere wiederum zunächst $\hat{\varphi} : F(X_1 \cup X_2) \to G$ durch $X_i \ni x \mapsto \varphi_i(\bar{x}) \in G$ für $i \in \{1, 2\}$. Somit gilt für $w \in R_i : \hat{\varphi}(w) = 0$. Also steigt $\hat{\varphi}$ ab zu $\varphi : G_1 \star G_2 \to G$ und es gilt $\varphi \circ i_1 = \varphi_1$ und $\varphi \circ i_2 = \varphi_2$. Die Eindeutigkeit von φ folgt aus der Kommutativitätsbedingung.

ii) Wir zeigen sogar ein Stückchen mehr, nämlich: Sind $\alpha_1 : G_1 \to G_1'$ und $\alpha_2 : G_2 \to G_2'$ Isomorphismen, dann induzieren diese einen Isomorphismus $\alpha : G_1 \star G_2 \to G_1' \star G_2'$ und dieser erhält die Einbettungen.
Aus ii) erhalten wir $\alpha : G_1 \star G_2 \to G_1' \star G_2'$ mit $\alpha \circ i_1 = i_1' \circ \alpha_1$ und $\alpha \circ i_2 = i_2' \circ \alpha_2$. Analog erhalten wir $\alpha' : G_1' \star G_2' \to G_1 \star G_2$ mit $\alpha' \circ i_1' = i_1 \circ \alpha_1^{-1}$ und $\alpha' \circ i_2' = i_2 \circ \alpha_2^{-1}$. Es gilt dann: $\alpha' \circ \alpha \circ i_1 = \alpha' \circ i_1' \circ \alpha_1 = i_1 \circ \alpha_1^{-1} \circ \alpha_1 = i_1$ und analog $\alpha' \circ \alpha \circ i_2 = i_2$. Aus der Eindeutigkeit in der UAE ist somit $\alpha' \circ \alpha = \mathrm{id}$. Analog gilt $\alpha \circ \alpha' = \mathrm{id}$ und wir haben die Behauptung gezeigt. □

Als nächstes betrachten wir für das amalgamierte Produkt die analogen Aussagen, also insbesondere eine universelle Abbildungseigenschaft und Unabhängigkeit von den gewählten Präsentationen. Anders als beim freien Produkt bekommen wir nicht unbedingt die ursprünglichen Gruppen als Untergruppen des amalgamierten Produkts.

Proposition 2.9. *In der Situation von Definition 2.7 ii) gilt:*

i) Wir erhalten natürliche Morphismen $f_1 : G_1 \to G_1 \star_U G_2$ und $f_2 : G_2 \to G_1 \star_U G_2$ mit $f_1 \circ \alpha_1 = f_2 \circ \alpha_2$.

ii) Das amalgamierte Produkt $G_1 \star_U G_2$ hängt von den gewählten Präsentationen nur bis auf Isomorphie ab.

iii) Wir haben die folgende universelle Abbildungseigenschaft: Für alle Gruppenhomomorphismen $\varphi_1 : G_1 \to G$ und $\varphi_2 : G_2 \to G$ in eine Gruppe G, die $\varphi_1 \circ \alpha_1 = \varphi_2 \circ \alpha_2$ erfüllen, gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi : G_1 \star_U G_2 \to G$ mit $\varphi \circ f_1 = \varphi_1$ und $\varphi \circ f_2 = \varphi_2$.

Beweis. Sei N der Normalteiler, der von $\{\alpha_1(y) = \alpha_2(y) |\, y \in Y\}$ in $G_1 \star G_2$ erzeugt wird und $p : G_1 \star G_2 \to (G_1 \star G_2)/N$ die natürliche Projektion.

i) Aus Proposition 2.8 erhalten wir die Einbettungen $i_1 : G_1 \hookrightarrow G_1 \star G_2$ und $i_2 : G_2 \hookrightarrow G_1 \star G_2$. Definiere $f_1 := p \circ i_1$ und $f_2 := p \circ i_2$. Für $u \in U$ gilt dann: $i_1(\alpha_1(u)) \cdot i_2(\alpha_2(u))^{-1} \in N$.
Daraus folgt: $f_1(\alpha_1(u)) = p(i_1(\alpha_1(u))) = p(i_2(\alpha_2(u))) = f_2(\alpha_2(u))$.

iii) Aus der UAE in Proposition 2.8 folgt, dass φ_1 und φ_2 eine Abbildung $\widehat{\varphi} : G_1 \star G_2 \to G$ induzieren, die $\widehat{\varphi} \circ i_1 = \varphi_1$ und $\widehat{\varphi} \circ i_2 = \varphi_2$ erfüllt.
Für $u \in U$ gilt: $\widehat{\varphi}(i_1(\alpha_1(u))) = \varphi_1(\alpha_1(u)) \overset{\text{Vor.}}{=} \varphi_2(\alpha_2(u)) = \widehat{\varphi}(i_2(\alpha_2(u)))$.
Somit steigt $\widehat{\varphi}$ ab zu $\varphi : G_1 \star_U G_2 \to G$ und erfüllt die gewünschten Bedingungen.

ii) Dies geht analog wie in Proposition 2.8 ii). □

Besonders nützlich sind amalgamierte Produkte, um Fundamentalgruppen zu bestimmen. Wir importieren dazu den im Folgenden angegebenen Satz von Seifert und van Kampen, den wir in dieser Vorlesung nicht beweisen.

Theorem (von Seifert und van Kampen). *Seien X ein zusammenhängender topologischer Raum, $Y_1, Y_2 \subseteq X$ wegzusammenhängend und offen mit $Z := Y_1 \cap Y_2$ ist wegzusammenhängend.*
Wir betrachten den von den Einbettungen $Z \hookrightarrow Y_1$ und $Z \hookrightarrow Y_2$ induzierten Gruppenhomomorphismen $\alpha_1 : \pi_1(Z) \to \pi_1(Y_1)$ und $\alpha_2 : \pi_1(Z) \to \pi_1(Y_2)$. Es gilt

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(Y_1) \star_{\pi_1(Z)} \pi_1(Y_2),$$

wobei das amalgamierte Produkt bezüglich der beiden Homomorphismen α_1 und α_2 gebildet wird.

Proposition 2.10. *Im Folgenden bestimmen wir mit Hilfe des Satzes von Seifert und van Kampen einige wichtige Fundamentalgruppen.*

i) Sei S_g eine geschlossene Fläche von Geschlecht $g \geq 0$. Es gilt:

$$\pi_1(S_g) \ \cong\ < A_1, B_1, \dots, A_g, B_g |\ [A_1, B_1] \cdot \ldots \cdot [A_g, B_g] >$$

ii) Sei S_g^1 eine kompakte Fläche von Geschlecht g mit einer Randkomponente. Es gilt:

$$\pi_1(S_g^1) \ \cong\ < A_1, B_1, \dots, A_g, B_g |\ \{\} > \ \cong\ F_{2g}$$

iii) Es sei R_n^{geom} die so genannte Rose mit n Blättern, *also die geometrische Realisierung des Graphen mit einer Ecke und g Schlaufen. Es gilt:*

$$\pi_1(R_n^{\mathrm{geom}}) \ \cong\ F_n$$

Allgemeiner gilt für eine beliebige Rose, also einen Graphen $\Gamma = (V, E)$ mit nur einer Ecke und möglicherweise unendlich vieler Kanten, dass $\pi_1(\Gamma^{\mathrm{geom}})$ eine freie Gruppe ist.

Beweis. Wir zeigen die Aussagen in umgekehrter Reihenfolge.

iii) Die Behauptung folgt für endliche Rosen direkt aus dem Satz von Seifert und van Kampen durch vollständige Induktion:

$$\pi_1(R_n) \cong \pi_1(R_{n-1}) \star_{\pi_1(\mathrm{pt})} \pi_1(R_1) \cong F_{n-1} \star F_1 \cong F_n.$$

Hierbei ist pt der topologische Raum, der nur aus einem Punkt besteht. Die Fundamentalgruppe davon ist trivial. Genau genommen müssen wir, um die Voraussetzung des Satzes von Seifert und van Kampen zu erfüllen, Y_1 und Y_2 etwas größer wählen, so dass sie offen sind.
Für unendliche Rosen wählen wir eine Orientierung E_+ der Kanten. Für $e \in E_+$ sei $\gamma_e : [0,1] \to \Gamma^{\mathrm{geom}}, t \mapsto (t, e)$ der lineare Weg durch die Schleife e. Wir wollen also zeigen, dass $\pi_1(\Gamma^{\mathrm{geom}}) \cong F(\{\gamma_e | e \in E_+\}) \cong F(E_+)$ gilt.
Die γ_e erzeugen $\pi_1(\Gamma^{\mathrm{geom}})$, denn ist $\gamma : [0,1] \to \pi_1(\Gamma^{\mathrm{geom}})$ ein Weg, dann ist sein Bild kompakt und durchläuft bis auf Homotopie nur endlich viele Kanten. Um die Freiheit der Gruppe zu zeigen betrachten wir für $w \in \pi_1(\Gamma^{\mathrm{geom}})$ zwei gekürzte Zerlegungen $w = \gamma_{e_1} \cdot \ldots \cdot \gamma_{e_n} = \gamma_{f_1} \cdot \ldots \cdot \gamma_{f_m}$. Dann liegt w aber vollständig in der Rose, die aus den Kanten $e_1, \ldots, e_n$ und $f_1, \ldots, f_m$ gebildet wird. Da aber die Fundamentalgruppe dieser endlichen Rose, wie wir oben bereits gezeigt haben, frei ist, müssen die beiden Zerlegungen gleich sein.

ii) X ist homotopieäquivalent zu R_{2g}. Also folgt die Behauptung aus iii).

i) Zerlege S_g als $S_g = Y_1 \cup Y_2$ mit Y_1 ist eine Fläche von Geschlecht g mit einer Randkomponente, also $Y_1 \cong S_g^1$, Y_2 ist eine Kreisscheibe und $Y_1 \cap Y_2$ ist ein Kreisring. Dann ergibt sich die Behauptung aus dem Satz von Seifert und van Kampen. □

Korollar 2.11. *Sei $\Gamma = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, dann ist $\pi_1(\Gamma^{\mathrm{geom}})$ eine freie Gruppe. Ist Γ ein endlicher Graph mit v Ecken und e geometrischen Kanten, dann gilt*

$$\pi_1(\Gamma^{\mathrm{geom}}) \cong F_n,$$

wobei F_n die freie Gruppe in $n = v - e + 1$ Erzeugern ist.

Beweis. Aus Aufgabe 2 auf Übungsblatt 4 folgt, dass wir einen aufspannenden Baum T wählen können. Die Kontraktion $\mathrm{T}^{\mathrm{geom}} \setminus \Gamma^{\mathrm{geom}}$ ist homöomorph zu einer Rose R. Aus Aufgabe 1 auf Übungsblatt 5 folgt, dass Γ^{geom} homotopieäquivalent zu $\mathrm{T}^{\mathrm{geom}} \setminus \Gamma^{\mathrm{geom}}$ ist. Also gilt:

$$\pi_1(\Gamma^{\mathrm{geom}}) \cong \pi_1(\mathrm{T}^{\mathrm{geom}} \setminus \Gamma^{\mathrm{geom}}) \cong \pi_1(R)$$

und ist damit eine freie Gruppe.
Ist Γ endlich so gilt $R = R_n$ und $\pi_1(\Gamma^{\mathrm{geom}}) \cong F_n$. Dabei ist n die Anzahl der geometrischen Kanten von $\mathrm{T}^{\mathrm{geom}} \setminus \Gamma^{\mathrm{geom}}$. Der aufspannende Baum T hat $v - 1$ geometrische Kanten. Somit ist $n = e - (v - 1) = e - v + 1$.

□

Mit Hilfe von Korollar 2.11 können wir im Folgenden klassifizieren, welche Gruppen frei auf einem Baum operieren.

Theorem 3. *Sei G eine endlich erzeugte Gruppe. Dann gilt: G ist genau dann eine freie Gruppe, wenn sie frei – also inversionsfrei und fixpunktfrei auf den Ecken – auf einem Baum operiert.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Ist G freie Gruppe mit Basis S, dann operiert G frei auf dem Cayleygraphen $\Gamma(G, S)$. Aus Proposition 1.3 folgt, dass dieser ein Baum ist.

„$\Leftarrow$“: Operiert nun umgekehrt G frei auf einem Baum $T = (V, E)$ und ist $\Gamma := G\backslash T$ und somit $\Gamma^{\text{geom}} \cong G\backslash \mathrm{T}^{\text{geom}}$, dann gilt: Die Abbildung $\mathrm{T}^{\text{geom}} \to G\backslash \mathrm{T}^{\text{geom}}$ ist eine unverzweigte Überlagerung. Da Bäume einfach zusammenhängend sind, ist es sogar eine universelle Überlagerung. Somit ist $G \cong \mathrm{Deck}(\mathrm{T}^{\text{geom}} / (G\backslash \mathrm{T}^{\text{geom}})) \cong \pi_1(\Gamma^{\text{geom}})$. Dies ist aber nach Korollar 2.11 eine freie Gruppe. □

Als direktes Korollar aus Theorem 3 erhalten wir den Satz von Nielsen und Schreier, der aussagt, wie Untergruppen von freien Gruppen aussehen.

Korollar 2.12 (Satz von Nielsen und Schreier)**.**

i) Untergruppen von freien Gruppen sind frei.

ii) Ist U Untergruppe von F_n von endlichem Index d, dann ist $U \cong F_m$, wobei $m = dn - d + 1$ gilt.

Beweis. i) Sei F eine freie Gruppe und U eine Untergruppe von F. Aus Theorem 3 folgt, dass F frei auf einem Baum T operiert. U tut das auch, indem man die Aktion von F auf U einschränkt. Somit folgt umgekehrt aus Theorem 3, dass U frei ist.

ii) Schreibe $F_n = F(x_1, \ldots, x_n)$. Sei $T = \Gamma(F_n, \{x_1, \ldots, x_n\})$. T ist also nach Proposition 1.3 ein Baum und der Quotient $F_n\backslash T$ ist die Rose R_n mit n Blättern. Wiederum ist die Abbildung $\mathrm{T}^{\text{geom}} \to G\backslash \mathrm{T}^{\text{geom}} \cong \Gamma^{\text{geom}}$ universelle Überlagerung. Zu $U \subseteq F_n$ gehört dann eine Zwischenüberlagerung $Y = U\backslash \mathrm{T}^{\text{geom}} \to R_n^{\text{geom}}$ von Grad d. Es gilt:

$$U \cong \mathrm{Deck}(\mathrm{T}^{\text{geom}} / U\backslash \mathrm{T}^{\text{geom}}) \cong \pi_1(Y) \cong F_m.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} m &= |\,\mathrm{E}^{\text{geom}}(U\backslash \mathrm{T}^{\text{geom}})| - |V(U\backslash T)| + 1 \\ &= d \cdot |\,\mathrm{E}^{\text{geom}}(R_n)| - d \cdot |V(R_n)| + 1 = dn - d + 1. \end{aligned}$$

□