KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
PROF. DR. F. HERRLICH
DIEGO DE FILIPPI

21.10.2010

Geometrische Gruppentheorie – Übungsblatt 1

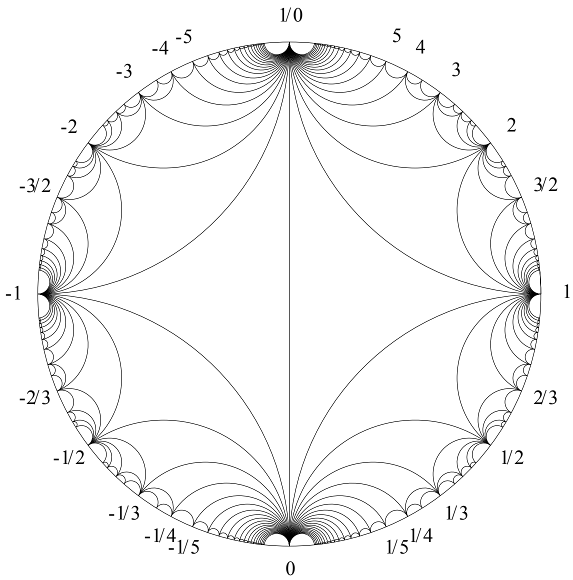
Aufgabe 1. (2 Punkte)

Finde zwei Gruppen G_1, G_2 mit Cayleygraphen Γ_1 und Γ_2, so dass Γ_1 und Γ_2 als Graphen isomorph sind, aber G_1 nicht isomorph zu G_2 ist.

Aufgabe 2. (6 Punkte)

Der Farey-Graph Γ ist folgendermaßen definiert:

- Die Menge der Ecken sei $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ (dabei sei ∞ mit $\frac{1}{0}$ identifiziert).
- Die Ecken $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ seien genau dann durch eine Kante verbunden, wenn $|ad-bc| = 1$.



a) Zeige, dass Γ planar ist (d.h. in den $\mathbb{R}^2$ eingebettet werden kann). In der Abbildung sieht man schon, wie die Abbildung auszusehen hat. Es ist also nur noch zu zeigen, dass sich die Kanten dort nicht schneiden.

b) Zeige, dass $\overline{\mathbb{D}} \setminus \Gamma$ nur aus Dreiecken besteht
($\overline{\mathbb{D}} :=$ offene Einheitskreisscheibe $\cup\ \mathbb{Q}\ \cup\ \{\infty\}$).

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Die sog. *Quaternionengruppe* Q ist die Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, die von den beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Gib einen Cayley-Graphen für Q an.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Es seien Γ_1 und Γ_2 Graphen, die keine singulären Ecken haben. (Eine Ecke heißt *singulär*, falls sie Randpunkt keiner Kante ist.) Weiterhin sei

$$f = (f_V, f_E): \quad \Gamma_1 \to \Gamma_2$$

ein Graphenhomomorphismus.

Welche der folgenden Aussagen ist wahr? (Bitte wie stets mit Beweis oder Gegenbeispiel.)

- f_V ist durch f_E vollständig bestimmt.
- f_E injektiv $\Rightarrow$ f_V injektiv.
- f_E surjektiv $\Rightarrow$ f_V surjektiv.
- f_V injektiv $\Rightarrow$ f_E injektiv.
- f_V surjektiv $\Rightarrow$ f_E surjektiv.
- f_E und f_V bijektiv $\Rightarrow$ f ist ein Isomorphismus.

Abgabe: bis Donnerstag, 28.10.2010 um 13:00 Uhr im gelben Einwurfkasten im ersten Stock des Allianzgebäudes bei den Seminarräumen. Die Übung am 01.11. fällt aus, da Feiertag ist.