Karlsruher Institut für Technologie (KIT) 23.12.2010
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Diego De Filippi

Geometrische Gruppentheorie – Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Gegeben seien

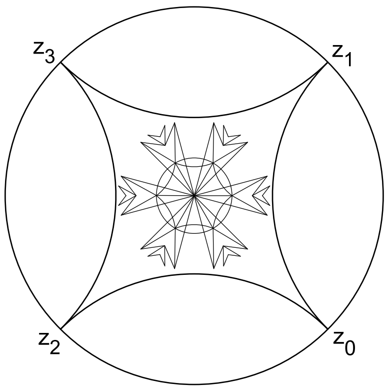
$$z_0 := \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i); \quad z_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i); \quad z_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i); \quad z_3 := \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$$

sowie $A, B \in \mathrm{PSU}_2(\mathbb{C}) := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} : a\overline{a} - b\overline{b} = 1, a, b \in \mathbb{C}\right\}/\{\pm\,\mathrm{id}\} \leq \mathrm{Isom}(\mathbb{D})$, wobei $A(z_0) = z_1$ und $B(z_0) = z_2$. Weiterhin seien i und $-i$ die Fixpunkte von A, sowie 1 und -1 die Fixpunkte von B. Außerdem sei $\Gamma := \langle A, B\rangle$.

a) Gib A und B explizit an.

b) Zeige: $A(z_2) = B(z_1) = z_3$.

c) Wie alle Kinder wünschen sich auch die hyperbolischen Kinder dieses Jahr weiße Weihnachten. Aber bis jetzt kann die Schneeflocke nur im Viereck $W := [z_0, z_1, z_3, z_2]$ schneien, deshalb hat sie die Rentiere A und B (mit Partnern A^{-1} und B^{-1}) gebeten, sie zu vervielfältigen, damit sie allen Kindern auf der hyperbolischen Welt weiße Weihnachten bringen kann. Wird das den Rentieren gelingen?



Nützlicher Hinweis: Die Rentiere basteln sich zuerst eine Landkarte, die sie aus Kopien von W zusammenkleben, für jedes Element in Γ eine Kopie. Damit überlagern sie doch ganz $\mathbb{D}$, oder? Und warum ist diese Landkarte schon $\mathbb{D}$ selbst und W damit ein Fundamentalbereich?
Überflüssiger Hinweis: Die hyperbolische Welt ist tatsächlich eine Scheibe, aber Kolumbus wäre trotzdem nie vom Rand gefallen, er wäre nie dort angekommen!

d) Wie viele Enden hat $\mathbb{D}/\Gamma$?

e) Zeige, dass $ABA^{-1}B^{-1}$ parabolisch ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien α, β und γ drei nichtnegative Zahlen, deren Summe kleiner als π ist. Zeige, dass ein hyperbolisches Dreieck mit den Winkeln α, β und γ existiert.
Hinweis: Am Einheitskreisscheiben-Modell lässt sich das z.B. sehr schön zeigen, wenn man eine Ecke in den Nullpunkt setzt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\Gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ eine Fuchsche Gruppe, $p \in \mathbb{H}$ sei Fixpunkt von keinem $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$. Zeige, dass der Dirichlet-Bereich $D_p(\Gamma)$ lokal endlich ist, d.h.:

$$\forall K \subseteq \mathbb{H}, K \text{ kompakt } : |\{\gamma \in \Gamma : K \cap \gamma(D_p(\Gamma)) \neq \emptyset\}| < \infty$$

Hinweis: Γ operiert diskontinuierlich auf $\mathbb{H}$, das heißt insbesondere, dass die Bahn von p diskret ist. Wenn man annimmt, dass $D_p(\Gamma)$ nicht lokal endlich ist, führt das zum Widerspruch.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gibt es eine torsionsfreie Fuchssche Gruppe, deren Dirichlet-Bereich ein kompaktes Sechseck ist? Wieso nicht?
Anmerkung: In der Formulierung der zweiten Frage ist ein Hinweis enthalten, der für die Beantwortung der ersten Frage nützlich sein könnte.

WIR WÜNSCHEN EUCH SCHÖNE WEIHNACHTEN
UND EINE GUTES NEUES JAHR 2011!

Abgabe: am Donnerstag, den 13.01.2011 um 13:00 im blauen Einwurfkasten im ersten Stock des Allianzgebäudes bei den Seminarräumen.