Geometrische Gruppentheorie – Übungsblatt 8 (Lösungen)

Aufgabe 1 a) Ansatz: $A(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$ mit $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$. Das Vorzeichen von a können wir wählen. Sei $a \geq 0$:

$$\frac{ai+b}{\bar{b}i+\bar{a}} = i \Leftrightarrow ai + b = -\bar{b} + i\bar{a} \Leftrightarrow -\operatorname{Im} a + \operatorname{Re} b = 0$$

$$\frac{-ai+b}{-\bar{b}i+\bar{a}} = -i \Leftrightarrow -ai + b = -\bar{b} - i\bar{a} \Leftrightarrow \operatorname{Im} a + \operatorname{Re} b = 0$$

Damit folgt $\operatorname{Re} b = \operatorname{Im} a = 0$ und somit $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{1-b^2}$

$$\frac{\sqrt{1-b^2}\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)+b}{-b\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)+\sqrt{1-b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-b^2}(1-i)+\sqrt{2}b}{-b(1-i)+\sqrt{2}\sqrt{1-b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-b^2}(1-i) + \sqrt{2}b = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)((-b(1-i) + \sqrt{2}\sqrt{1-b^2})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-b^2}(1-i) + \sqrt{2}b = -\sqrt{2}b + \sqrt{1-b^2}(1+i)$$

$$\Leftrightarrow i\sqrt{1-b^2} = \sqrt{2}b \Rightarrow -1 + b^2 = 2b^2 \Leftrightarrow -1 = b^2$$

und wir erhalten $b = i, \quad a = \sqrt{2}$

Ansatz: $B(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$ mit $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$. Sei $a \geq 0$:

$$\frac{a+b}{\bar{b}+\bar{a}} = 1 \Leftrightarrow a + b = \bar{b} + \bar{a} \Leftrightarrow \operatorname{Im} a + \operatorname{Im} b = 0$$

$$\frac{-a+b}{-\bar{b}+\bar{a}} = -1 \Leftrightarrow -a + b = \bar{b} - \bar{a} \Leftrightarrow -\operatorname{Im} a + \operatorname{Im} b = 0$$

Damit folgt $\operatorname{Im} b = \operatorname{Im} a = 0$ und somit $a^2 - b^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{1+b^2}$

$$\frac{\sqrt{1+b^2}\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)+b}{b\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)+\sqrt{1+b^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+b^2}(1-i)+\sqrt{2}b}{b(1-i)+\sqrt{2}\sqrt{1+b^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+b^2}(1-i) + \sqrt{2}b = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)(b(1-i) + \sqrt{2}\sqrt{1+b^2})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+b^2}(1-i) + \sqrt{2}b = -\sqrt{2}b - \sqrt{1+b^2}(1+i)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+b^2} = -\sqrt{2}b \Rightarrow 1 + b^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 1 = b^2$$

und wir erhalten $b = -1, \quad a = \sqrt{2}$
Insgesamt also:

$$A(z) = \frac{\sqrt{2}z+i}{-iz+\sqrt{2}}, \qquad B(z) = \frac{\sqrt{2}z-1}{-z+\sqrt{2}}$$

b) $A(-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)) = \frac{-(1+i)+i}{\frac{i}{\sqrt{2}}(1+i)+\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{i(1+i)+2} = \frac{-\sqrt{2}}{i+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$
$B(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)) = \frac{(1+i)-1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)+\sqrt{2}} = \frac{i\sqrt{2}}{-(1+i)+2} = \frac{i\sqrt{2}}{-i+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$

c) Nehme für jedes Element $\gamma \in \Gamma$ eine Kopie von W, die wir mit W_γ bezeichnen und verklebe sie jeweils nach folgenden Vorschriften:
Verklebe die Kopie von $[z_3, z_1]$ in W_γ mit der Kopie von $[z_2, z_0]$ in $W_{\gamma A}$
Verklebe die Kopie von $[z_2, z_0]$ in W_γ mit der Kopie von $[z_3, z_1]$ in $W_{\gamma A^{-1}}$
Verklebe die Kopie von $[z_0, z_1]$ in W_γ mit der Kopie von $[z_2, z_3]$ in $W_{\gamma B}$
Verklebe die Kopie von $[z_2, z_3]$ in W_γ mit der Kopie von $[z_0, z_1]$ in $W_{\gamma B^{-1}}$

Damit erhalten wir einen Raum $\tilde{W}$, der $\mathbb{D}$ überlagert. Die Überlagerungsabbildung ist die, die W_γ auf $\gamma(W)$ schickt. Diese Überlagerung ist unverzweigt, d.h. jeder Punkt in $\mathbb{D}$ hat eine Umgebung U, deren Urbild eine disjunkte Vereinigung V von Kopien von U ist. Das klappt auch an den Rändern von W, da

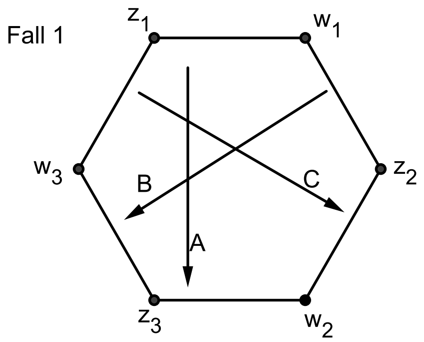
nach dem b)-Teil die Abbildungen A und B die Geodätische $[z_0, z_2]$ auf $[z_1, z_3]$, bzw $[z_0, z_1]$ auf $[z_2, z_3]$ abbilden. Es ist noch zu zeigen, dass das V von oben nicht leer ist.
Die komplexe Stuktur von $\mathbb{D}$ kann nach $\tilde{W}$ geliftet werden.
Sei nun $z \in \mathbb{D}$ und α ein Weg von einem Punkt in W (z.B. 0) nach z. Dieser Weg lässt sich nach $\tilde{W}$ liften: Der Anfang des gelifteten Weges $\tilde{\alpha}$ liegt in W_{id}. Wenn α das Viereck W verlässt, dann über eine der 4 Geodätischen $[z_i, z_j]$. Dort hat aber auch $\tilde{\alpha}$ eine Fortsetzung, nach Konstruktion von $\tilde{W}$, geht also in einer Kopie von W weiter, diese verlässt er dann dann über die Kopie von einer der 4 Geodätischen $[z_i, z_j]$ usw. Außerdem ist $\tilde{W}$ nach Konstruktion zusammenhängend. Damit haben wir eine zusammenhängende unverzweigte Überlagerung von ganz $\mathbb{D}$. Da $\mathbb{D}$ aber einfach zusammenhängend ist, ist $\tilde{W}$ aber schon die universelle Überlagerung und damit $\mathbb{D}$ selbst. Also erleben alle hyperbolischen Kinder weiße Weihnachten, die Rentieren haben gute Arbeit geleistet. Außerdem ist W damit ein Dirichlet-Bereich für Γ.
d) Nach dem c)-Teil ist W ein Dirichlet-Bereich. $\mathbb{D}/\Gamma$ ist also homöomorph zum Viereck W, bei dem die Seiten $[z_0, z_2]$ und $[z_1, z_3]$, sowie die Seiten $[z_0, z_1]$ und $[z_2, z_3]$ jeweils miteinander "verklebt" werden. Insbesondere werden z_0, z_1, z_2, z_3 miteinander identifiziert. Ein geodätischer Strahl muss gegen diesen Punkt laufen. Damit hat $\mathbb{D}/\Gamma$ genau ein Ende. $\mathbb{D}/\Gamma$ ist ein punktierter Torus.

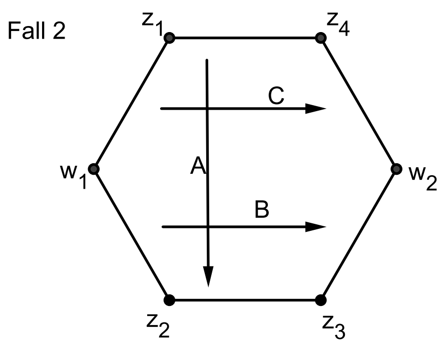
e)
$$ABA^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & i \\ -i & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -i \\ i & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 2-i & -\sqrt{2}(1-i) \\ -\sqrt{2}(1+i) & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i & \sqrt{2}(1-i) \\ \sqrt{2}(1+i) & 2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-4i & -2i\sqrt{2}(1-i) \\ 2i\sqrt{2}(i+1) & -1+4i \end{pmatrix}$$
Die Spur davon ist -2, also ist das Element parabolisch.

Aufgabe 2) Wir verwenden das Kreisscheiben-Modell. Seien g_1 und g_2 zwei geodätische Strahlen, die in 0 starten und den Winkel α bilden. g_1 und g_2 sind auch euklidische Geraden. Für jeden Punkt $P \in g_1$ gibt es eine Geodätische g_3, die durch P geht und g_1 mit Innenwinkel (d.h. der in Richtung 0 und g_2) β schneidet. Wenn der Abstand zwischen P und 0 gegen 0 geht, geht auch die euklidische Krümmung von g_3 gegen 0 und deshalb der Innenwinkel zwischen g_3 und g_2 gegen $\pi - \alpha - \beta$, d.h irgendwann ist der Winkel gleich γ.
g_3 schneidet auch g_2, wenn P nach genug an 0 ist. Das folgt daraus, dass der Winkel zwischen g_3 und g_2 genau $\pi - \alpha - \beta$ ist, wenn $P = 0$.

Aufgabe 3) Angenommen, $D_p(\Gamma)$ ist nicht lokal endlich. Dann existiert eine Folge (γ_i) von paarweise verschiedenen Elementen in Γ und ein $K \subset \mathbb{H}$ kompakt mit $\forall i \in \mathbb{N} : K \cap \gamma_i(D_p(\Gamma)) \neq \emptyset$. Sei $a \in D_p(\Gamma)$ und $\sigma = \sup_{z \in K} d(p, z)$. Da $\forall z : d(p, z) \leq d(p, a) + d(a, z)$ und K beschränkt ist, ist $\sigma < \infty$.
Sei nun $w_j \in K \cap \gamma_i(D_p(\Gamma))$. Dann existiert ein $z_j \in D_p(\Gamma)$ mit $w_j = \gamma_j(z_j)$. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir:
$$\begin{aligned} d(p, \gamma_j(p)) &\leq d(p, w_j) + d(w_j, \gamma_j(p)) \\ &= d(p, w_j) + d(z_j, p) \\ &\leq d(p, w_j) + d(w_j, p) \quad \text{, da } z_j \in D_p(\Gamma) \\ &\leq 2\sigma \end{aligned}$$
Damit liegen die unedlich vielen Bahnpunkte von p, nämlich $\gamma_1(p), \gamma_2(p), ...$ in $B_{2\sigma}(p)$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass Γ diskontinuierlich ist.

Aufgabe 4 Da Γ diskontinuierlich auf der hyperbolischen Ebene operiert und torsionsfrei ist, operiert Γ fixpunktfrei. Seien A, B und C die Elemente, die Seitenpaare des Sechsecks W miteinander identifizieren. Zwei Fälle sind möglich (benachbarte Seiten können wegen der Fixpunktfreiheit nicht aufeinander abgebildet werden):





Fall 1: Es gilt $A \cdot z_1 = z_3$ und $B \cdot z_2 = z_3$. Angenommen, es existiert ein weiteres $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$ mit $z_3 \in \gamma(W)$:
$\gamma \cdot z_1 = z_3 \Rightarrow (\gamma \cdot A^{-1}) \cdot z_3 = z_3 \Rightarrow \gamma = A$ Widerspruch.
$\gamma \cdot z_2 = z_3 \Rightarrow (\gamma \cdot B^{-1}) \cdot z_3 = z_3 \Rightarrow \gamma = B$ Widerspruch.
$\gamma \cdot w_i = z_3$ kann deshalb nicht vorkommen, weil Γ von A, B und C erzeugt wird. Wenn man sich einen Graphen konstruiert, dessen Kanten die Bahnen der Seiten von W sind und dessen Ecken die Bahnen der Ecken von W, dann operiert Γ auf diesem Graphen und die Bilder von z_i hat immer geraden Abstand (bzgl. Graphenmetrik) von z_j. D.h. die Bahn von z_i und die Bahn von w_j sind disjunkt.

Fall 2: Es gilt $CB^{-1} \cdot w_1 = w_1$. Daraus folgt $B = C$. Widerspruch.

Insgesamt folgt damit, dass die Innenwinkelsumme von W gleich 4π ist. Das kann aber nicht sein, da die Innenwinkelsumme von hyperbolischen Dreiecken kleiner als π ist und das Sechseck in 4 Dreiecke zerlegt werden kann.