Karlsruher Institut für Technologie (KIT) 13.01.2011
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Diego De Filippi

Geometrische Gruppentheorie – Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeige, dass die Quaternionengruppe durch die Präsentation

$$Q = \langle a, b \mid a^4 = 1,\ a^2 = b^2,\ bab^{-1} = a^{-1} \rangle$$

gegeben ist.

Erinnerung: die Quaternionengruppe ist die Gruppe, die von den beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

erzeugt wird (siehe auch Blatt 1, A3).

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeige, dass in einer endlich erzeugten freien Gruppe das Konjugationsproblem lösbar ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei Z_n die Menge der positiven, nicht wiederholenden Zöpfe und $p : B_n \to \mathcal{S}_n$ die Abbildung, die jedem Zopf die dazugehörige Permutation zuordnet. Zeige, dass $p \mid Z_n : Z_n \to \mathcal{S}_n$ bijektiv ist.

Erinnerung: Ein Zopf heißt **positiv**, wenn er als Wort in den s_i geschrieben werden kann (ohne Verwendung der s_i^{-1}) und ein positiver Zopf heißt **nicht wiederholend**, wenn sich zwei Stränge höchstens einmal kreuzen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

In der Zopfgruppe B_n sei das Element

$$\Omega := (s_1 s_2 ... s_{n-1})(s_1 s_2 ... s_{n-2}) ... (s_1 s_2) s_1$$

gegeben. Zeige, dass Ω^2 im Zentrum von B_n liegt.

Hinweis: Zeige zunächst, dass $s_{n-i}\Omega = \Omega s_i$.

Abgabe: am Donnerstag, den 20.01.2011um 13:00 im blauen Einwurfkasten im ersten Stock des Allianzgebäudes bei den Seminarräumen.