

Geometrische Gruppentheorie – Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei (x_1, \dots, x_n) eine Basis von F_n , der freien Gruppe vom Rang n . Sei G die von

$$\alpha_{ij} : \begin{cases} x_i \mapsto x_i x_j \\ x_k \mapsto x_k \text{ für } k \neq i \end{cases} \quad \text{für } i \neq j \quad \text{und} \quad \beta_i : \begin{cases} x_i \mapsto x_i^{-1} \\ x_k \mapsto x_k \text{ für } k \neq i \end{cases}$$

erzeugte Untergruppe von $\text{Aut}(F_n)$.

a) Zeige, dass G alle Permutationen der Basiselemente von F_n enthält.

b) Zeige, dass die Elemente

$$\alpha : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 x_2, x_2, \dots, x_n), \quad \beta : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1^{-1}, x_2, \dots, x_n),$$

$$\gamma : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_2, \dots, x_n, x_1), \quad \delta : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_2, x_1, x_3, \dots, x_n)$$

G erzeugen.

Bemerkung: G ist schon ganz $\text{Aut}(F_n)$. Das zu zeigen ist allerdings etwas aufwändiger.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei (x_1, \dots, x_n) wie in Aufgabe 1.

a) Gibt es ein $\varphi \in \text{Aut}(F_n)$ mit $\varphi(x_1) = x_1^2$?

b) Gibt es ein $\varphi \in \text{Aut}(F_n)$ mit $\varphi(x_1) = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}$?

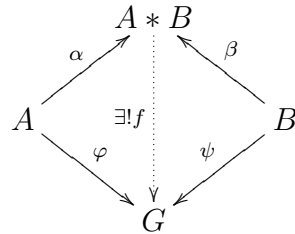
Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $P = \langle X \mid R \rangle$, $P' = \langle X' \mid R' \rangle$ zwei endliche Präsentationen derselben Gruppe G .
Zeige: Ist das Wortproblem für P entscheidbar, so auch für P' .

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (4 Punkte)

- a) Gegeben seien zwei Gruppen A und B . Zeige, dass es eine Gruppe $A * B$ und Homomorphismen $\alpha : A \rightarrow A * B$, sowie $\beta : B \rightarrow A * B$ gibt mit folgender Eigenschaft:
Für jede Gruppe G und alle Homomorphismen $\varphi : A \rightarrow G$ und $\psi : B \rightarrow G$ existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $f : A * B \rightarrow G$ mit $f \circ \alpha = \varphi$ und $f \circ \beta = \psi$.



- b) Bestimme $A * B$ für $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $B = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Abgabe: am Donnerstag, den 27.01.2011 um 13:00 im blauen Einwurfkasten im ersten Stock des Allianzgebäudes bei den Seminarräumen.