Karlsruher Institut für Technologie (KIT) 27.01.2011
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Diego De Filippi

Geometrische Gruppentheorie – Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeige, dass die obere Halbebene $\mathbb{H}$ mit der hyperbolischen Metrik ein δ-hyperbolischer Raum ist, und bestimme ein δ.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Der Raum (X,d) sei δ-hyperbolisch. Für ein geodätisches Dreieck $\Delta(x,y,z) \subset X$ mit den Seiten $[x,y]$, $[y,z]$, $[z,x]$ definieren wir

$$\operatorname{diam}(\Delta(x,y,z)) := \sup\{d(a,b) \mid a,b \in [x,y] \cup [y,z] \cup [z,x]\}, \quad \text{sowie}$$

$$\operatorname{minsize}(\Delta(x,y,z)) := \inf\{\operatorname{diam}(\Delta(p_x,p_y,p_z)) \mid p_x \in [y,z], p_y \in [z,x], p_z \in [x,y]\}$$

Zeige, dass $\operatorname{minsize}(\Delta(x,y,z)) \leq 2\delta$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeige, dass der Cayley-Graph von $\left(\mathbb{Z}/_{m\,\mathbb{Z}}\right) * \left(\mathbb{Z}/_{n\,\mathbb{Z}}\right)$ (siehe Blatt 12, Aufgabe 4) δ-hyperbolisch ist und bestimme das minimale δ.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $\delta_1, \delta_2 > 0$. Sei (X_1, d_1) ein δ_1-hyperbolischer Raum und (X_2, d_2) ein δ_2-hyperbolischer Raum. Für $w_1 \in X_1$, $w_2 \in X_2$ sei Y die Verklebung von X_1 und X_2, die w_1 und w_2 miteinander identifiziert. Auf Y definieren wir eine Metrik d vermöge

$$d(x,y) := \begin{cases} d_i(x,y), & \text{falls } x,y \in X_i \text{ für } i = 1,2 \\ d_1(x,w_1) + d_2(w_2,y), & \text{falls } x \in X_1, y \in X_2 \text{ und } i \neq j \end{cases}$$

Zeige, dass Y wieder ein δ-hyperbolischer Raum (für ein $\delta > 0$) ist.

Abgabe: am Donnerstag, den 03.02.2011 um 13:00 im blauen Einwurfkasten im ersten Stock des Allianzgebäudes bei den Seminarräumen.