Karlsruher Institut für Technologie (KIT) 03.02.2011
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Diego De Filippi

Geometrische Gruppentheorie – Übungsblatt 14

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben seien die Gruppen G_1, G_2 und A, sowie Homomorphismen $\alpha_1 : A \to G_1$ und $\alpha_2 : A \to G_2$.
Wir definieren rekursiv die Normalteiler G_1^n, G_2^n und A^n von G_1, G_2 und A:

$$A^1 = \{1\}, \quad G_1^1 = \{1\}, \quad G_2^1 = \{1\}$$

Für $n \geq 2$: $A^n :=$ von $\alpha_1^{-1}(G_1^{n-1})$ und $\alpha_2^{-1}(G_2^{n-1})$ erzeugter Normalteiler von A.
$G_i^n :=$ von $\alpha_i(A^n)$ erzeugter Normalteiler.
Desweiteren seien $A^\infty := \bigcup_{n=1}^\infty A^n$, $G_1^\infty := \bigcup_{n=1}^\infty G_1^n$ und $G_2^\infty := \bigcup_{n=1}^\infty G_2^n$ gegeben.

a) Zeige, dass α_i einen injektiven Homomorphismus $A/A^\infty \to G_i/G_i^\infty$ induziert.

b) Zeige, dass $G_1 *_A G_2 \cong \left(G_1/G_1^\infty\right) *_{\left(A/A^\infty\right)} \left(G_2/G_2^\infty\right)$ gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $G = G_1 *_A G_2$ und sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe, in der die Länge der Elemente beschränkt ist. Zeige, dass H konjugiert zu einer Untergruppe von G_1 oder G_2 ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Zeige, dass $\mathbb{Z} *_\mathbb{Z} \mathbb{Z}$ über $\alpha_1 = \mathrm{id}$ und $\alpha_2 = \mathrm{id}$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.

b) Zeige, dass $\mathbb{Z} *_\mathbb{Z} \mathbb{Z}$ über $\alpha_1 : z \mapsto 2z$ und $\alpha_2 : z \mapsto 4z$ nicht isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben seien drei endliche abelsche Gruppen G_1, G_2 und A, sowie injektive Homomorphismen $\alpha_1 : A \hookrightarrow G_1$ und $\alpha_2 : A \hookrightarrow G_2$.
Zeige, dass $G_1 *_A G_2$ eine freie Gruppe mit endlichem Index enthält.

Abgabe: am Donnerstag, den 10.02.2011 um 13:00 im blauen Einwurfkasten im ersten Stock des Allianzgebäudes bei den Seminarräumen.