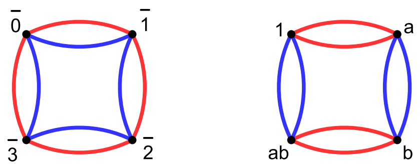
Geometrische Gruppentheorie – Übungsblatt 1- Lösungen

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Ganz einfach macht man es sich natürlich, wenn man zwei nicht isomorphe Gruppen G_1 und G_2 mit jeweils n Elementen nimmt (klappt halt nicht für $n \leq 3$ oder n prim, aber die muss man ja nicht nehmen) und dazu die Cayley-Graphen $\Gamma_1(G_1, \emptyset)$ und $\Gamma_2(G_2, \emptyset)$. Denn die bestehen jeweils aus n Ecken und 0 Kanten und sind deshalb isomorph zueinander.
Ein etwas interessanteres Beispiel: $G_1 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $G_2 = V_4(:= \{a, b, ab = ba, a^{=}2b^2 = 1\})$ und $\Gamma_1(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \{\bar{1}, \bar{3}\})$ und $\Gamma_2(V_4, \{a, b\})$



Aufgabe 2. (6 Punkte)

a) - Die Kante zwischen $\frac{1}{0}$ und $\frac{0}{1}$ wird nicht geschnitten (*): Diese teilt nämlich $\mathbb{Q}$ in einen positiven und einen negativen Bereich. Wenn diese Kante also geschnitten würde, gäbe es $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $a < 0$ und $b, c, d > 0$, so dass $|ad - bc| = 1$. Das kann aber nicht sein.

- Wir zeigen also oBdA, dass sich zwei Kanten "aus dem positiven Bereich" nicht schneiden (der "negative Bereich" ist analog dazu).
Gegeben seien $0 < \frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d} < \frac{v}{w} \leq \infty$ (**) mit $|ad - bc| = |xw - vy| = 1$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1}}_{\det=\pm 1} \underbrace{\begin{pmatrix} x & v \\ y & w \end{pmatrix}}_{\det=\pm 1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & v \\ y & w \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} dx - cy & dv - cw \\ -bx + ay & -bv + aw \end{pmatrix}}_{\det=\pm 1}$$

$\Rightarrow \frac{dx-cy}{-bx+ay}$ und $\frac{dv-cw}{-bv+aw}$ sind durch eine Kante verbunden.
Aber aus (**) folgt $\frac{dx-cy}{-bx+ay} > 0$ und $\frac{dv-cw}{-bv+aw} < 0$, im Widerspruch zu (*).

b) Wir haben auf jeden Fall schon einmal die Dreiecke $(0, 1, \infty)$ und $(0, -1, \infty)$. Angenommen, es gäbe ein n-Eck für $n \geq 3$ (sodass darin keine weitere Kante verläuft). In a) haben wir aber gesehen, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Operation auf der Menge der Kanten definiert. Diese Operation ist transitiv. Man kann also ein Element in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ finden, dass eine Kante unsere n-Ecks auf die Kante zwischen 0 und ∞ schickt. Das ist aber ein Widerspruch zu Teil a).

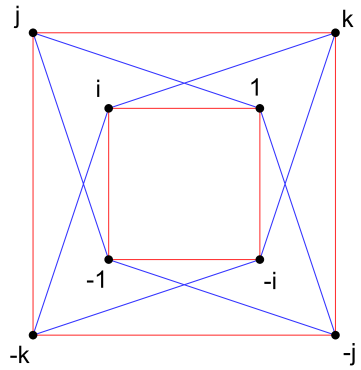
Aufgabe 3. (4 Punkte)

Definiere
$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} := i, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} := j \quad \text{und} \quad ij = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} := k$$

Es gilt: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ und $ki = -ik = j$.
Somit ist $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ und so sieht übrigens die Verknüfungstafel aus

	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

Der Cayleygraph $\Gamma(Q, \{i, j\})$ sieht dann folgendermaßen aus:



Aufgabe 4. (4 Punkte)

- f_V ist durch f_E vollständig bestimmt. (wahr)
  Sei $v \in V(\Gamma_1)$. Da es keine singulären Ecken gibt, ist jede Ecke Randpunkt einer Kante, d.h. $\exists\, e \in E(\Gamma_1)$ mit $i(e) = v$.
  Somit ist $f_V(v) = f_V(i(e)) = if_E(e)$.

- f_E injektiv $\Rightarrow f_V$ injektiv. (falsch)
  Gegenbeispiel: Γ_1 bestehe aus zwei Ecken, die durch eine Kante verbunden werden, und Γ_2 aus einer Ecke mit einer Schleife.

- f_E surjektiv $\Rightarrow f_V$ surjektiv. (wahr)
  Sei $v \in V(\Gamma_2) \Rightarrow \exists\, e \in E(\Gamma_2)$ mit $i(e) = v$ (da v nicht singulär ist).
  f_E surjektiv $\Rightarrow \exists\, \tilde{e} \in\ E(\Gamma_1)$ mit $f_E(\tilde{e}) = e \Rightarrow v = i(e) = i(f_E(\tilde{e})) = f_V(i(\tilde{e})) \Rightarrow f_V$ ist surjektiv.

- f_V injektiv $\Rightarrow f_E$ injektiv. (falsch)
  Gegenbeispiel: Γ_1 bestehe aus zwei Ecken, die durch zwei Kanten verbunden werden, und Γ_2 aus zwei Ecken, die mit einer Kante verbunden werden.

- f_V surjektiv $\Rightarrow f_E$ surjektiv. (falsch)
  Gegenbeispiel: Γ_1 bestehe aus zwei Ecken, die durch eine Kante verbunden werden, und Γ_2 ebenso mit einer zusätzlichen Schleife.

- f_E und f_V bijektiv $\Rightarrow f$ ist ein Isomorphismus. (wahr)
  Es ist zu zeigen, dass (f_V^{-1}, f_E^{-1}) ein Morphismus ist:
  Sei $e_2 \in E(\Gamma_2)$. Da f_E bijektiv ist, gibt es ein $e_1 \in E(\Gamma_1)$ mit $f_E(e_1) = e_2$. Somit haben wir:

$$\begin{aligned} f_V^{-1}(i(e_2)) &= f_V^{-1}(i(f_E(e_1))) \\ &= f_V^{-1}(f_V(i(e_1))) \quad \text{(da } f \text{ Morphismus)} \\ &= i(e_1) \\ &= i(f_E^{-1}(e_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_E^{-1}(\overline{e_2}) &= f_E^{-1}(\overline{f_E(e_1)}) \\ &= f_E^{-1}(f_E(\overline{e_1})) \quad \text{(da } f \text{ Morphismus)} \\ &= \overline{e_1} \\ &= \overline{f_E^{-1}(e_2)} \end{aligned}$$