Karlsruher Institut für Technologie (KIT) 28.10.2010
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Diego De Filippi

Geometrische Gruppentheorie – Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe, $S \subseteq G$ und G_S die von S erzeugte Untergruppe von G. Zeige, dass die Linksnebenklassen von G_S bijektiv den Zusammenhangskomponenten des Cayley-Graphen $\Gamma(G, S)$ entsprechen.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Betrachte die folgenden vier Metriken auf $\mathbb{R}^2$ aus der Vorlesung: die Euklidsche Metrik, die Manhatten-Metrik, die SNCF-Metrik und die KVV-Metrik.

a) Welche der Metriken induzieren dieselbe Topologie?
Erinnerung: Eine Metrik d auf X induziert eine Topologie durch:
$U \subseteq X$ ist offen $\Leftrightarrow \forall x \in U\ \exists \varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) := \{y \in X | d(x, y) < \varepsilon\}$ ist in U enthalten.

b) Ein metrischer Raum (X, d) hat per Definition die *Y-Eigenschaft*, falls es für je drei Punkte x, y, z aus X einen Punkt m gibt mit

$$\begin{aligned} d(x, m) + d(m, y) &= d(x, y), \\ d(x, m) + d(m, z) &= d(x, z) \text{ und} \\ d(y, m) + d(m, z) &= d(y, z) \end{aligned}$$

(X, d) hat die *eindeutige Y-Eigenschaft*, wenn der Punkt m jeweils eindeutig bestimmt ist.
Welche der Metriken aus a) haben die Y-Eigenschaft und welche sogar die eindeutige Y-Eigenschaft?

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Zeige: Zu jeder abzählbaren Gruppe G gibt es einen zusammenhängenden Graphen Γ mit $\mathrm{Isom}(\Gamma) \cong G$.

Hinweis: Ein Cayleygraph ist schon mal ein guter Anfang. Dann muss man zusätzliche Automorphismen zerstören.

Abgabe: bis Donnerstag, 04.11.2010 um 13:00 Uhr im gelben Einwurfkasten im ersten Stock des Allianzgebäudes bei den Seminarräumen.