Karlsruher Institut für Technologie (KIT) 04.11.2010
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Diego De Filippi

Geometrische Gruppentheorie – Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei Γ ein Baum. Für $x, y \in \Gamma^{\text{geom}}$ bezeichne $[x, y]$ die eindeutig bestimmte Geodätische von x nach y. Zeige:

$$\forall x, y, z \in \Gamma^{\text{geom}} \ \exists m \in \Gamma^{\text{geom}} : [x, y] \cap [y, z] \cap [x, z] = \{m\}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei Γ ein Graph. Der Graph Γ^{sub} sei definiert durch

$$\begin{aligned} V(\Gamma^{\text{sub}}) &:= V(\Gamma) \cup \{\text{geometrische Kanten von } \Gamma\} \\ E(\Gamma^{\text{sub}}) &:= E(\Gamma) \times \{-1, 1\} \end{aligned}$$

$$i(e, 1) := i(e), \quad t(e, 1) := i(e, -1) = [e], \quad t(e, -1) := t(e) \ \text{ und } \ \overline{(e, \pm 1)} := (\bar{e}, \mp 1)$$

Dabei bezeichne $[e]$ die Ecke von Γ^{sub}, die von der Kante $e \in E(\Gamma)$ herrührt.
Zeige, dass jede Aktion $\rho : G \to \text{Aut}(\Gamma)$ eine inversionsfreie Aktion $\rho^{\text{sub}} : G \to \text{Aut}(\Gamma^{\text{sub}})$ induziert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeige, dass jeder zusammenhängende Graph einen aufspannenden Teilbaum enthält, d.h. einen Teilgraphen, der ein Baum ist, welcher alle Ecken des ursprünglichen Graphen enthält.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Auf X definieren wir eine Äquivalenzrelation durch $x \sim y$ gdw. $x = y$ oder $x, y \in A$. Sei $X/A := X/\sim$ (versehen mit der Quotiententopologie). Beweise oder widerlege die beiden folgenden Aussagen:

a) Ist X Hausdorffsch, so gilt: X/A ist Hausdorffsch $\Rightarrow$ A ist abgeschlossen.

b) Ist X Hausdorffsch, so gilt: A ist abgeschlossen $\Rightarrow$ X/A ist Hausdorffsch.

Abgabe: bis Donnerstag, 11.11.2010 um 13:00 Uhr im gelben Einwurfkasten im ersten Stock des Allianzgebäudes bei den Seminarräumen.