Geometrische Gruppentheorie – Übungsblatt 3 – Lösungen

Aufgabe 4 - Lösung
a) Zu Zeigen: Wenn X hausdorffsch ist, dann gilt

$$X/A \text{ hausdorffsch} \Rightarrow A \text{ ist abgeschlossen.}$$

Sei $\pi : X \to X/A$ die Quotientenabbildung, $[x] := \pi(x)$, insbes. sei $a \in A$ und $[a] := \pi(A)$: Sei $x \in X \setminus A$. Dann gilt $[x] \neq [a] \in X/A$. Da X/A ein Hausdorffraum ist, existieren offene $U([x])$ und $U([a])$ mit $U([x]) \cap U([a]) = \emptyset$. Insbes also $[a] \notin U([x])$. Da $U([x])$ nach der Quotiententopologie offen ist, ist $V(x) := \pi^{-1}(U([x]))$ eine offene Umgebung von x in X. Zudem gilt $A \cap V(x) = \emptyset$. Somit ist $V(x)$ eine offene Umgebung von x in $X \setminus A$. Somit ist $X \setminus A$ offen und A deshalb abgeschlossen.

b) Die Umkehrung gilt i.A. nicht:
Gegenbeispiel: Sei $\mathbb{R}$ mit folgender Topologie $\mathcal{T}$ versehen:
$V \in \mathbb{R}$ sei offen bzgl. $\mathcal{T}$, wenn $V = U \setminus M$ für eine in der Standardtopologie offenen Menge U und einer abzählbaren Menge M.
Bzgl. $\mathcal{T}$ ist jede abzählbare Menge abgeschlossen. Insbesondere ist also $A := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ bzgl. $\mathcal{T}$ abgeschlossen.
Aber jede euklidisch-offene Umgebung $U_E(0)$ hat mit A nichtleeren Schnitt und somit auch nichtleeren Schnitt mit jeder euklidisch-offenen Umgebung $U_E(A)$.
Da aber $U_E(x) \cap U_E(A)$ überabzählbar ist, gibt es auch bzgl. $\mathcal{T}$ keine offene Mengen, die A und 0 trennen. Also ist $\mathbb{R}/A$ nicht hausdorffsch.
Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{T}$ auch tatsächlich eine hausdorffsche Topologie ist:

- $\mathbb{R}, \emptyset \in \mathcal{T}$ ist klar.
- Seien $V_1 = U_1 \setminus M_1$ und $V_2 := U_2 \setminus M_2$ offen bzgl. $\mathcal{T}$:
$$V_1 \cap V_2 = (U_1 \setminus M_1) \cap (U_2 \setminus M_2) = \underbrace{(U_1 \cap U_2)}_{\text{eukl. offen}} \setminus \underbrace{(M_1 \cup M_2)}_{\text{abz.}}$$
- Sei $V_i = U_i \setminus M_i, (i \in I)$ eine Familie von offenen Mengen bzgl. $\mathcal{T}$:
$$\bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} (U_i \setminus M_i)$$
($\mathbb{R}$, eukl.) hat eine abzählbare Basis, nämlich $\mathcal{B} := \{(p,q) \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$. (Erinnerung: Eine Basis $\mathcal{B}$ einer Topologie ist eine Teilmenge der Menge der offenen Mengen, so dass man jede offene Menge als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ schreiben kann). Deshalb kann man $\bigcup_{i \in I}(U_i \setminus M_i)$ auch so schreiben: $\bigcup_{k=1}^{\infty}(B_k \setminus M_k)$ für $B_k \in \mathcal{B}$. Es gilt aber
$$\bigcup_{k=1}^{\infty}(B_k \setminus M_k) = \underbrace{\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)}_{\text{eukl. offen}} \setminus M$$
für eine Menge $M \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$. M ist somit abzählbar, denn die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen ist auch abzählbar, denn
$$\underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}_{\text{abz.}} = (\mathbb{N} \times \{1\}) \cup (\mathbb{N} \times \{2\}) \cup ...$$

Dass $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ hausdorffsch ist, folgt daraus, dass $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie hausdorffsch ist und, dass jede euklidisch-offene Menge in $\mathbb{R}$ auch offen bzgl. $\mathcal{T}$ ist.