Karlsruher Institut für Technologie (KIT) 18.11.2010
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Diego De Filippi

Geometrische Gruppentheorie – Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Was sind die Enden der folgenden metrischen Räume?

$(X,d), d$ diskrete Metrik; $(\mathbb{R}^2, d_{\text{KVV}})$; $(\mathbb{R}\times[-1,1), d_{\text{KVV}})$; $(\mathbb{R}^2, d_{\text{SNCF}})$; $\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Z}^2$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei F eine endlich erzeugte freie Gruppe, $\Lambda := \{s_1, ..., s_n\}$ eine fest gewählte Basis von F und $\hat{F}$ bezeichne die Menge der endlichen und (einseitig) unendlichen reduzierten Wörter in den $s_i^{\pm 1}$. Sei $\beta_1 \wedge \beta_2$ das längste gemeinsame Anfangswort von β_1 und $\beta_2 \in \hat{F}$ und sei $d : \hat{F} \times \hat{F} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben durch

$$d(\beta_1, \beta_2) := \begin{cases} \frac{1}{1+|\beta_1 \wedge \beta_2|}, & \text{für } \beta_1 \neq \beta_2 \\ 0 & \text{für } \beta_1 = \beta_2 \end{cases}$$

(Mit $|\cdot|$ ist die Wortmetrik bzgl. der oben gewählten Basis gemeint).

a) Zeige, dass d eine Metrik ist und dass $\hat{F} \setminus F$ dicht in $\hat{F}$ ist.

b) Zeige, dass sich jeder Gruppenautomorphismus $f \in \operatorname{Aut} F$ in eindeutiger Weise zu einem Homöomorphismus $\hat{f} : \hat{F} \to \hat{F}$ fortsetzen lässt.
Hinweis: Für den Beweis nützlich ist die Größe eines Automorphismus $f \in \operatorname{Aut} F$, die definiert ist als
$$S(f) = \max_{\alpha\in\Lambda}\{|f(\alpha)|, |f^{-1}(\alpha)|\}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume.

a) Für zwei Abbildungen $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ gelte $f \sim g$ genau dann, wenn
$$\sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x))$$
endlich ist. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation definiert.

b) Sei $\mathcal{QI}(X) := \mathcal{QI}(X, d_X)$ die Menge der Äquivalenzklassen (bezüglich $\sim$) von Quasi-Isometrien $X \to X$. Zeige, dass $\mathcal{QI}(X)$ mit der durch die Hintereinanderausführung induzierten Verknüpfung eine Gruppe wird und dass jede Quasi-Isometrie $h : X \to Y$ einen Gruppenisomorphismus $\mathcal{QI}(X) \to \mathcal{QI}(Y)$ induziert.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein *Netz* in X ist eine Teilmenge S, so dass ein $r > 0$ existiert mit

$$U_r(S) := \{y \in X \mid d(y, S) < r\} = X.$$

Dann heißt S auch r-Netz.

Sei $\varepsilon > 0$. Ein *ε-separiertes Netz* ist ein Netz S, für das gilt:

$$d(x, y) \geq \varepsilon, \qquad \text{für alle} \quad x, y \in S, x \neq y.$$

Ein *separiertes Netz* ist eines, das ε-separiert ist für ein $\varepsilon > 0$. Zeige:

a) Jeder metrische Raum enthält ein ε-separiertes Netz für jedes beliebige $\varepsilon > 0$.
(Hier hilft das Zornsche Lemma.)

b) Sei (X', d') ein weiterer metrischer Raum und $f : X \to X'$ eine Quasi-Isometrie. Dann ist das Bild eines Netzes wieder ein Netz. Für ausreichend großes ε ist das Bild eines ε-separierten Netzes wieder separiert.

Abgabe: bis Donnerstag, 25.11.2010 um 13:00 Uhr im blauen Einwurfkasten im ersten Stock des Allianzgebäudes bei den Seminarräumen.