**Geometrische Gruppentheorie – Übungsblatt 5**

**Aufgabe 1** (4 Punkte)

$(X, d), d$ diskrete Metrik hat 0 Enden:
Es gibt keine Strahlen in $X$, denn ein solcher müsste stetig und damit konstant sein. Das Urbild des einzigen Bildpunktes (= kompakte Menge) wäre aber dann $[0, \infty)$, also nicht kompakt. Also gibt es keine eigentliche Abbildung $r : [0, \infty) \to X$.
$(\mathbb{R}^2, d_{\text{KVV}})$: Sei $r : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ ein Strahl. Da dieser stetig ist, kann er abschnittsweise nur parallel zur $y$-Achse und auf der $x$-Achse verlaufen.
*Fall 1*: Die $x$-Werte von $r([0, \infty))$ sind unbeschränkt.
Wir nehmen als kompakte Menge $\{(x_0, 0)\}$, die nur aus dem Punkt besteht: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, 0)\}$ hat dann folgende 4 Zusammenhangskomponenten:

$$Z_1(x_0) := \{(x, y) \mid x < x_0\}; \quad Z_2(x_0) := \{(x, y) \mid x > x_0\}$$

$$Z_3(x_0) := \{(x, y) \mid x = x_0, y > 0\}; \quad Z_4(x_0) := \{(x, y) \mid x = x_0 y < 0\}$$

Sind die $x$-Werte von $r([0, \infty))$ nach oben unbeschränkt, dann gilt $r([N, \infty)) \subseteq Z_2(x_0)$, sind sie dagegen nach unten unbeschränkt, dann gilt $r([N, \infty)) \subseteq Z_1(x_0)$.
Da kompakte Mengen in metrischen Räumen beschränkt sind, folgt, dass die Strahlen mit nach oben unbeschränkten $x$-Werten und die mit nach unten unbeschränkten $x$-Werten in jeweils einer Äquivalenzklasse liegen. Wir haben also schon mal die zwei Enden $E_{+\infty}$ und $E_{-\infty}$.
*Fall 2*: Die $x$-Werte von $r([0, \infty))$ sind beschränkt.
Wir nehmen als kompakte Menge $K$ das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ auf der $x$-Achse, wobei $a$ das Infimum und $b$ das Supremum dieser $x$-Werte sei.
Die Zusammenhangskomponenten, in denen $r([N, \infty))$ liegen kann, sind genau die zur $y$-Achse parallelen Halbgeraden mit positivem, bzw. negativem $y$-Wert und $x$-Wert zwischen $a$ und $b$. Diese repräsentieren jeweils ein Ende. Es kommen also pro $x$-Wert nochmal jeweils zwei Enden $E_x^+$ und $E_x^-$ hinzu.
$(\mathbb{R} \times [-1, 1), d_{\text{KVV}})$: Wie oben erhalten wir hier die Enden $E_{+\infty}$ und $E_{-\infty}$ sowie die Enden $E_x^+$ zu den Teilmengen mit festem $x$-Wert und $y \in [0, 1)$. Die Enden $E_x^-$ gibt es hier nicht, da $r([N, \infty))$ nicht in einer Teilmenge der Form $\{x\} \times [-1, 0]$ liegen kann, da diese kompakt ist und die Abbildung $r$ dann nicht eigentlich wäre.
$(\mathbb{R}^2, d_{\text{SNCF}})$: $\{(0, 0)\}$ ist kompakt und die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ sind genau die Halbgeraden, die in $\{(0, 0)\}$ starten. Diese entsprechen auch den Enden.
$\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$: Eine kompakte Menge $K$ muss beschränkt sein und einen positiven Abstand $\varepsilon_x > 0$ zu jedem Punkt aus $x \in \mathbb{Z}^2$ haben (sonst wäre $\bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2) \setminus \overline{B_{\frac{1}{n}}(x)}$ eine offene Überdeckung von $K$ ohne endliche Teilüberdeckung).
Damit kann man ohne Einschränkung annehmen, dass $K = \overline{B_R(x)} \setminus \bigcup_{i=1}^{m} B_{\varepsilon_{x_i}}$ für ein $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$, geeignetes $R$ und geeignete $x_1, ..., x_m \in \mathbb{Z}^2$. Die Zusammenhangskomponenten des Komplements von $K$ sind also Umgebungen um entsprechende Punkte in $\mathbb{Z}^2$ und $(\mathbb{R}^2 \setminus Z^2) \setminus \overline{B_R(x)}$. Wir erhalten somit ein Ende für jeden Punkt in $\mathbb{Z}^2$ und ein Ende im Unendlichen.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)

a)Zeige, dass $d$ eine Metrik ist: Reflexivität und Symmetrie sind klar.
Transitivität:
Seien $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ paarweise verschieden: Da $|\beta_1 \wedge \beta_3| \geq \min\{|\beta_1 \wedge \beta_2|, |\beta_2 \wedge \beta_3|\}$, folgt

$$\frac{1}{1 + |\beta_1 \wedge \beta_2|} + \frac{1}{1 + |\beta_2 \wedge \beta_3|} \geq \frac{1}{1 + |\beta_1 \wedge \beta_3|}$$

Zeige, dass $F$ dicht in $\hat{F}$ ist (und nicht, wie fälschlicherweise verlangt, dass $\hat{F} \setminus F$ dicht in $\hat{F}$ ist - das ist nämlich falsch, sorry):
Sei $\beta \in \hat{F} \setminus F$. Bezeichne mit $\beta_\varepsilon \in F$ das Anfangswort von $\beta$ mit Länge $\lceil \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \rceil + 1$. Es gilt $d(\beta, \beta_\varepsilon) < \varepsilon$. Daraus folgt die Behauptung.

b) Wir definieren zunächst $\Lambda^* := \{s^{\pm}1 \mid s \in \Lambda\}$ und $\mathrm{init}(\alpha, n) :=$ Anfangswort von $\alpha$ mit Länge $n$.
Sei nun $\alpha \in \hat{F}$. Definiere $\alpha_p := \mathrm{init}(\alpha, p)$ und $\beta_p := \alpha_{p-1}^{-1}\alpha_p$, somit $\alpha_p = \beta_1 \cdot ... \cdot \beta_p$ mit $\beta_i \in \Lambda^*$.
Schreibe $f(\alpha_p) = a_1 \cdot ... \cdot a_n$ mit $a_i \in \Lambda^*$, $a_i \neq a_{i+1}\ \forall i$.
Dann gilt $|\alpha_p| = |f^{-1}(a_1) \cdot ... \cdot f^{-1}(a_n)| \leq |f^{-1}(a_1)| + ... + |f^{-1}(a_n)| \leq n \cdot S(f) = |f(\alpha_p)| \cdot S(f)$ und es folgt $|f(\alpha_p)| \geq \frac{|\alpha_p|}{S(f)}$.
Sei $m_p := \left\lceil \frac{|\alpha_p|}{S(f)} \right\rceil = \left\lceil \frac{p}{S(f)} \right\rceil$. Wenn $p$ groß genug ist, so dass $m_p - S(f) \geq 0$, folgt aus $f(\alpha_{p+1}) = f(\alpha_p) \cdot f(\beta_{p+1})$ und $|f(\beta_{p+1})| \leq S(f)$, dass

$$\mathrm{init}(f(\alpha_{p+1}), m_p - S(f)) = \mathrm{init}(f(\alpha_p), m_p - S(f)).$$

Da $\forall k \in \mathbb{N} : m_{k+1} \geq m_k$, folgt somit, dass $\mathrm{init}(f(\alpha_{p+t}), m_p - S(f))$ unabhängig von $t \geq 0$ ist. Somit existiert eine stetige Fortsetzung von $f$, die gegeben ist durch $\hat{f}(\alpha) := \lim_{p\to\infty} f(\alpha_p)$. Die Eindeutigkeit folgt daraus, dass $F$ dicht in $\hat{F}$ ist, des Weiteren ist $\hat{F}$ ein Homöomorphismus, da $\widehat{f^{-1}} \circ \hat{f} = \mathrm{id}.$.

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

a) Aus der Definition folgt sofort $f \sim f$ und $f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$ für $f, g : X \to Y$. Seien $f$, $g$, $h$ Abbildungen von $X$ nach $Y$ und es gelte $f \sim g$ und $g \sim h$. Dann ist

$$\begin{aligned}\sup_{x\in X} d_Y(f(x), h(x)) &\leq \sup_{x\in X}(d_Y(f(x), g(x)) + d_Y(g(x), h(x))) \\ &\leq \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x)) + \sup_{x\in X} d_Y(g(x), h(x)) < \infty.\end{aligned}$$

Also gilt $f \sim h$. Damit ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

b) Sei $f : X \to X$ eine $(\lambda, c)$-Quasi-Isometrie und $g \sim f$. Dann ist $g$ ebenfalls eine Quasi-Isometrie. Denn es gibt ein $K \geq 0$ mit $d(f(x), g(x)) \leq K$ für alle $x \in X$, und es gilt

$$d(g(x), g(y)) \leq d(g(x), f(x)) + d(f(x), f(y)) + d(f(y), g(y)) \leq \lambda d(x, y) + c + 2K$$

und

$$\frac{1}{\lambda} d(x, y) - c \leq d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), g(x)) + d(g(x), g(y)) + d(g(y), f(y))$$

für $x, y \in X$. Mit dem gleichen Spiel wie eben ist

$$\tfrac{1}{\lambda} d(x, y) - c - 2K \leq d(g(x), g(y)).$$

Außerdem ist $f$ eine $D$-quasi-surjektive Abbildung. Somit existiert zu $x \in X$ ein $y \in X$ mit $d(f(y), x) \leq D$, und es folgt

$$d(x, g(y)) \leq d(x, f(y)) + d(f(y), g(y)) \leq D + K.$$

Also ist $g$ eine $D+K$-quasi-surjektive Abbildung und insgesamt eine Quasi-Isometrie. Aus Aufgabe 1, Blatt 3 folgt, dass die Verkettung von zwei Quasi-Isometrien wieder eine Quasi-Isometrie ist. Damit die Verknüpfung von Abbildungen zu einer Verknüpfung auf der Menge der Äquivalenzklassen absteigt, ist zu zeigen, dass für Quasi-Isometrien $f, f', g, g'$ auf $X$ mit $f \sim f'$, $g \sim g'$ auch $gf = g \circ f \sim g' \circ f' = g'f'$ ist. Für $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} d(gf(x), g'f'(x)) &\leq d(gf(x), gf'(x)) + d(gf'(x), g'f'(x)) \\ &\leq \lambda_g d(f(x), f'(x)) + c_g + K_g \\ &\leq \lambda_g K_f + c_g + K_g. \end{aligned}$$

Hierbei ist $g$ eine $(\lambda_g, c_g)$-Quasi-Isometrie und

$$\sup_{x \in X} d(f(x), f'(x)) \leq K_f, \ \sup_{x \in X} d(g(x), g'(x)) \leq K_g$$

für zwei Konstanten $K_f$, $K_g \geq 0$. Also ist $gf \sim g'f'$. Wir schreiben im Folgenden $[f]$ für die Äquivalenzklasse von $f$.

Die Assoziativität der Verknüpfung von Abbildungen überträgt sich auf die Verknüpfung auf den Äquivalenzklassen.

Die Identität ist eine Quasi-Isometrie, und ihre Äquivalenzklasse ist offensichtlich das Neutralelement von $\mathcal{QI}(X)$. Ist $f$ eine Quasi-Isometrie, so existiert eine quasi-inverse Quasi-Isometrie $g$, so dass

$$d(gf(x), x) \leq K \text{ und } d(fg(x), x) \leq K$$

für eine Konstante $K \geq 0$ gilt. Das heißt aber $[gf] = [\mathrm{id}]$ und $[fg] = [\mathrm{id}]$, also hat jedes Element ein Inverses. Damit ist $\mathcal{QI}(X)$ eine Gruppe.

Sei $h : X \to Y$ eine $(\lambda_h, c_h)$-Quasi-Isometrie. Definiere

$$\Phi : \mathcal{QI}(X) \to \mathcal{QI}(Y), \ [f] \mapsto [hfh'].$$

Dabei ist $h'$ eine Quasi-Inverse zu $h$. Wir behaupten, dass $\Phi$ ein Gruppenisomorphismus ist.

$\Phi$ ist eine wohldefinierte Abbildung, denn sei $[f] \in \mathcal{QI}(X)$, und $f' \in [f]$, das heißt $d_X(f'(x), f(x)) \leq K_1$ für alle $x \in X$ und eine Konstante $K_1 \geq 0$. Es gilt für $y \in Y$

$$d_Y(hfh'(y), hf'h'(y)) \leq \lambda_h d_X(fh'(y), f'h'(y)) + c_h \leq \lambda_h K_1 + c_h < \infty,$$

also $hfh' \sim hf'h'$.

$\Phi$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Denn seien $[f], [g] \in \mathcal{QI}(X)$. Dann gilt $hfh'hgh' \sim hfgh'$. Denn für alle $y \in Y$ ist

$$d_Y(hfh'hgh'(y), hfgh'(y)) \leq \lambda_{hf} d_X(h'hgh'(y), gh'(y)) + c_{hf} \leq \lambda_{hf} K_2 + c_{hf},$$

denn $hf$ ist eine $(\lambda_{hf}, c_{hf})$-Quasi-Isometrie (für entsprechende Konstanten) und $h'h$ ist eine Quasi-Identität auf $X$ (daher die Konstante $K_2 \geq 0$).

Schließlich ist $\Psi : \mathcal{QI}(Y) \to \mathcal{QI}(X)$, $[g] \mapsto [h'gh]$ die Inverse zu $\Phi$. Sicherlich ist $\Psi$ ein wohdefinierter Homomorphismus und man rechnet leicht nach, dass eine Quasi-Isometrie $f : X \to X$ von $h'hfh'h$ beschränkten Abstand hat, woraus $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathcal{QI}(X)}$ folgt. Die Gleichung $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathcal{QI}(Y)}$ bekommt man auf analoge Weise.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

a) Wir betrachten die Menge der $\varepsilon$-separierten Mengen:

$$\mathcal{M} := \{S \subseteq X \mid \forall x, y \in S : d(x,y) \geq \varepsilon\}$$

$\mathcal{M}$ ist nicht leer, da einpunktige Mengen in $\mathcal{M}$ sind, und $\mathcal{M}$ ist bezüglich der Inklusion teilgeordnet. Außerdem hat jede Kette $(S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 ...)$ in $\mathcal{M}$ als obere Schranke $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$. Diese liegt in $\mathcal{M}$, denn wenn $x, y \in \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$, dann existiert ein $i_0 \in \mathbb{N} : x, y \in S_{i_0}$ und daraus folgt $d(x,y) \geq \varepsilon$.
Damit sind also alle Voraussetzungen für das Lemma von Zorn erfüllt und es gibt somit ein maximales Element $\overline{S} \in \mathcal{M}$.
Jetzt bleibt nur noch zu zeigen, dass $\overline{S}$ ein Netz ist. Wir zeigen, dass $\overline{S}$ ein $\varepsilon$-Netz ist: Angenommen, es gäbe ein $x \in \overline{S}$ mit $d(x, \overline{S}) \geq \varepsilon$. Dann wäre $\overline{S} \subsetneq (\overline{S} \cup \{x\}) \in \mathcal{M}$ im Widerspruch zur Maximalität von $\overline{S}$. Es folgt insgesamt, dass $\overline{S}$ ein $\varepsilon$-separiertes $\varepsilon$-Netz ist.

b) Sei $f$ eine $(\lambda, c)$-q.i.E. und $D$-quasi-surjektiv, sei $S$ ein $r$-Netz in $X$ und sei $x' \in X'$. Da $f$ quasi-surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $d(x', f(x)) < D$. Da $S$ ein $r$-Netz ist, existiert ein $s \in S$ mit $d(x,s) < r$ und somit:

$$d(x', f(S)) \leq d(x', f(s)) \leq d(x', f(x)) + d(f(x), f(s)) \leq D + \lambda d(x,s) + c < D + \lambda r + c$$

Damit ist $f(S)$ ein $(D + \lambda r + c)$-Netz in $X'$.
Sei $S$ nun zusätzlich $\varepsilon$-separiert: Dann gilt

$$\forall x, y \in S : \varepsilon \leq d(x,y) \leq \lambda(d(f(x), f(y)) + c)$$

und damit $d(f(x), f(y)) \geq \frac{\varepsilon}{\lambda} - c$ und dieser Wert ist positiv für hinreichend großes $\varepsilon$.