Karlsruher Institut für Technologie (KIT) 25.11.2010
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Diego De Filippi

Geometrische Gruppentheorie – Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $G = \langle S \rangle$ eine endlich erzeugte Gruppe. Zeige: Wenn G genau zwei Enden hat, dann enthält G ein Element unendlicher Ordnung.

Hinweis: Wähle einen Ball $B_R(1_G)$ um die Identität in (G, d_S), der die beiden Enden trennt. Dabei ist d_S die Wortmetrik zu S. Finde ein Gruppenelement $\gamma \in (G, d_S) \setminus B_R(1_G)$, das trivial auf der Menge der Enden von (G, d_S) operiert, und zeige, dass γ unendliche Ordnung hat. Betrachte hierzu $\gamma^n(r)$ für einen geodätischen Strahl $r \subset (G, d_S) \setminus B_R(1_G)$, der bei γ anfängt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Bestimme die Enden der Gruppe $\mathrm{Aut}(\Gamma(\mathbb{Z}, \{1\}))$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei F eine freie Gruppe von endlichem Rang.

a) Was sind die Enden von F?

b) Zeige, dass die Metrik auf $\hat{F}$, die auf dem letzten Übungsblatt eingeführt wurde, auf $\mathrm{End}(F)$ die in der Vorlesung (Def.+Bem 8.3) definierte Topologie induziert.

Erinnerung: Die Metrik auf $\hat{F}$ war so definiert:

$$d(\beta_1, \beta_2) := \begin{cases} \frac{1}{1+|\beta_1 \wedge \beta_2|}, & \text{für } \beta_1 \neq \beta_2 \\ 0 & \text{für } \beta_1 = \beta_2 \end{cases}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Seien G und H endlich erzeugte Gruppen und $\phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass ϕ genau dann eine Quasi-Isometrie (bezüglich gewählter Wortmetriken) induziert, wenn $\mathrm{Kern}\,\phi$ und die Menge der Nebenklassen $H/\,\mathrm{Bild}\,\phi$ endlich sind.

b) Sei U eine endlich erzeugte Gruppe und $V \leq U$ eine Untergruppe von endlichem Index. Zeige, dass U und V quasi-isomorph sind.
Hinweis: Eine Untergruppe einer endlich erzeugten Gruppe ist ebenfalls endlich erzeugt, wenn sie von endlichem Index ist. (Das kann ohne Beweis verwendet werden.)

Abgabe: am Donnerstag, 02.12.2010 um 13:00 im gelben Einwurfkasten im ersten Stock des Allianzgebäudes bei den Seminarräumen.