Karlsruher Institut für Technologie (KIT) 02.12.2010
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Diego De Filippi

Geometrische Gruppentheorie – Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei X ein eigentlicher metrischer Raum und $\rho : G \to \mathrm{Isom}(X)$ eine Gruppenaktion. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Die Aktion ρ ist diskontinuierlich, d.h.
$$\forall K \subseteq X, K \text{ kompakt, gilt: } |\{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\}| < \infty$$

(ii) Für alle $x \in X$ ist die Bahn $G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\}$ von x lokal endlich, d.h. für alle kompakten Mengen $K \subseteq X$ gilt: $|\{g \in G : g \cdot x \in K\}| < \infty$.

(iii) Jedes $x \in X$ hat eine Umgebung V, so dass $(g \cdot V \cap V \neq \emptyset \Rightarrow g \cdot x = x)$ und $\forall x \in X : |\operatorname{Stab}(x)| < \infty$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $G = \langle S \rangle$ eine endlich erzeugte Gruppe. Im letzten Übungsblatt war zu zeigen, dass G ein Element unendlicher Ordnung enthält (also $\mathbb{Z} \leq G$), wenn G genau zwei Enden hat. Zeige, dass G dann auch quasi-isometrisch zu $\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei F eine endlich erzeugte freie Gruppe vom Rang ≥ 2. Zeige, dass jedes $e \in \mathrm{End}(F)$ Häufungspunkt in $\mathrm{End}(F)$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei T ein Baum, d die Graphenmetrik darauf, G eine Gruppe und
$$\rho : G \to \mathrm{Isom}(T, d), \quad g \mapsto \rho_g$$
ein Gruppenhomomorphismus.
Für ein $g \in G$ sei $\|g\| = \inf_{x \in T} d(x, \rho_g(x))$. Wir definieren die *charakteristische Menge* von $g \in G$ als
$$C_g := \big\{x \in T \mid d(x, \rho_g(x)) = \|g\|\big\}.$$
Zeige:

a) Wenn g inversionsfrei ist, dann ist C_g ein nichtleerer Teilbaum, der invariant unter der Aktion von g ist.

b) Für $\|g\| > 0$ ist der Baum C_g isometrisch zu $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und g operiert auf $C_g \cong \mathbb{R}$ durch Translation um $\|g\|$.

c) Ist $\|g\| > 0$, so hat $g_\epsilon : \mathrm{End}(T) \to \mathrm{End}(T)$ zwei Fixpunkte.

Abgabe: am Donnerstag, den 09.12.2010 um 13:00 im gelben Einwurfkasten im ersten Stock des Allianzgebäudes bei den Seminarräumen.