Karlsruher Institut für Technologie (KIT) 09.12.2010
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Diego De Filippi

Geometrische Gruppentheorie – Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben seien $z, w \in \mathbb{H}, z \neq w$. Zeige, dass es ein eindeutig bestimmtes $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ gibt mit $\gamma(z) = i$ und $\gamma(w) = ir$ für ein $r > 1$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $z, w \in \mathbb{H}$, $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ und d bezeichne den hyperbolischen Abstand. Zeige:

a) $|\gamma(z) - \gamma(w)| = |z - w| \cdot |\gamma'(z) \cdot \gamma'(w)|^{\frac{1}{2}}$

b) $\sinh(\frac{1}{2}d(z, w)) = \frac{|z-w|}{2(\mathrm{Im}(z)\cdot\mathrm{Im}(w))^{\frac{1}{2}}}$

c) Die Menge $m(z, w) := \{y \in \mathbb{H} : d(z, y) = d(y, w)\}$ ist Mittelsenkrechte des geodätischen Segments $[z, w]$, d.h. $m(z, w)$ ist die hyperbolische Gerade, die $[z, w]$ senkrecht im Mittelpunkt schneidet.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

a) Zeige, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ von $T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $S := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ erzeugt wird.

b) Wir betrachten die Menge $T_0 := \{\cos\theta + i\sin\theta : \theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]\}$ als geometrische Realisierung des Baumes, der aus zwei Ecken und einer Kante besteht. Zeige, dass die Menge $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot T_0 := \{\gamma(T_0) : \gamma \in \rho(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))\}$ ein Baum ist (bzw. dessen geometrische Realisierung). Dabei sei $\rho : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Aut}\,\mathbb{H}$ die übliche Operation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$ durch Möbiustransformationen, die auch in der Vorlesung besprochen wurde.

Hinweis: Sei $z \in T_0$: Zeige zunächst, dass aus $\gamma(T_0) \cap T_0 \neq \emptyset$ folgt, dass γ einen Randpunkt von T_0 fixiert. Dazu hilft es zu zeigen, dass für $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ gilt:

$$|(c^2 - d^2)\gamma(z) - (ac - bd)| = 1$$

Dann zeige, dass $\mathrm{Re}(\gamma(z)) = 0 \Rightarrow z = i$.

c) Zeige, dass die Untergruppe $\Gamma(2)$ von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, die von den Elementen $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt wird, frei ist.

Abgabe: am Donnerstag, den 16.12.2010 um 13:00 im gelben Einwurfkasten im ersten Stock des Allianzgebäudes bei den Seminarräumen.