Geometrische Gruppentheorie – Blatt 8 Lösungen zu Aufgabe 3b) und c)

Aufgabe 3 b)

Zeige den Hinweis:

Sei $|z| = 1$ und $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

$$|(c^2 - d^2)\gamma(z) - (ac - bd)| = \frac{|(c^2 - d^2)(az + b) - (ac - bd)(cz + d)|}{|cz + d|}$$
$$= \frac{|-ad^2z + bc^2 - acd + bcdz|}{|cz + d|} = \frac{|dz + c|}{|cz + d|} = \frac{|\overline{z}(dz + c)|}{|cz + d|} = \frac{|c\overline{z} + d|}{|cz + d|} = 1$$

Wir zeigen: $\gamma(T_0) \cap T_0 \Rightarrow \gamma$ fixiert einen Randpunkt von T_0:

Fall 1: $c^2 \neq d^2$

Mit dem Hinweis folgt, dass $\gamma(z)$ auf einem Kreis mit Mittelpunkt $\frac{ac-bd}{c^2-d^2}$ und Radius $\frac{1}{|c^2-d^2|}$ liegt. Wenn nun $\gamma(z) \in T_0$, gilt $\mathrm{Im}(\gamma(z)) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}$ und somit $|c^2 - d^2| < 2 \Rightarrow |c^2 - d^2| = 1$. Damit kann der Mittelpunkt (MP) des Kreises nur 0 oder 1 sein.

Fall 1a: MP=0, also $ac - bd = 0$

$$\begin{cases} ac - bd = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2c^2 + b^2d^2 - a^2d^2 - b^2c^2 = -1 \\ ad - bc = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (c^2 - d^2)(a^2 - b^2) = -1 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$$

Für $c^2 - d^2 = 1$ ist dann $b = \pm\sqrt{1 + a^2} \in \mathbb{Z}$, also $a = 0$, $b = \pm 1$, $c = \mp 1$, $d = 0$

Für $c^2 - d^2 = -1$ ist dann $b = \pm\sqrt{-1 + a^2} \in \mathbb{Z}$, also $a = \pm 1$ und $b = 0$, $d = \pm 1$, $c = 0$.

Damit gilt $\gamma = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ oder $\gamma = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Im 1. Fall wird nur i fix gelassen, im 2. ganz T_0.

Fall 1b: MP=1

Es gilt $\gamma(z) = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$, denn das ist der einzige Punkt von T_0, der Abstand 1 von 1 hat. Er muss aber auch Bildpunkt einer Ecke sein, da sonst dessen Urbild im Inneren von T_0 läge, das geht aber nach den bisherigen Überlegungen nicht. Außerdem gilt $\mathrm{Im}\,\gamma(i) = \mathrm{Im}\,\frac{ai+b}{ci+d} = \frac{1}{c^2+d^2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) \neq \gamma(i)$. Also ist $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ Fixpunkt von γ.

Fall 2: $c^2 = d^2$

Wegen $ad - bc = 1$ folgt, dass $|c| = |d| = 1$. O.E. sei $c = 1$ und $d = \pm 1$. Dann gilt:

$$\mathrm{Re}\,\gamma(z) = \frac{ac|z|^2 + bd + \mathrm{Re}\,z(ad + bc)}{|cz + d|^2} = \frac{(a \pm b) \pm \mathrm{Re}\,z(a \pm b)}{|z \pm 1|^2} = \frac{(a \pm b)(1 \pm \mathrm{Re}\,z)}{|z|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}\,z + 1} = \frac{(a \pm b)}{2}$$

Damit kann also $\gamma(z)$ nur am Rand von T_0 liegen.

Damit folgt, dass $T := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot T_0$ ein Graph ist, dessen Kanten die Bilder von T_0 sind.

T ist zusammenhängend:

Der Stabilisator von i ist

$$G_i = \{\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$$

Denn $\frac{ai+b}{ci+d} = i \Rightarrow (a - d)i + b + c = 0 \Rightarrow a = d$ und $b = -c \overset{ad-bc=1}{\Longrightarrow} a^2 + b^2 = 1$, also $d = a = \pm 1, b = c = 0$ oder $a = d = 0, b = \pm 1, c = \mp 1$.

Der Stabilisator von $\frac{1+i\sqrt{3}}{2} := t$ ist

$$G_t = \{\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\}$$

Denn

$$\frac{a\frac{1+i\sqrt{3}}{2} + b}{c\frac{1+i\sqrt{3}}{2} + d} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2a(1 + i\sqrt{3}) + 4b}{c(1 + i\sqrt{3}) + 2d} = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2a + 4b - 2d + 2c + i\sqrt{3}(2a - 2c - 2d) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + 2b - d + c = 0 \\ a - c - d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -c \\ d = a + b \end{cases}$$

Somit haben wir $1 = ad - bc = a^2 + ab + b^2$. Vorhin haben wir gesehen, dass $ac - bd$ entweder 0, 1 oder -1 sein kann (letzteres nur, wenn $c^2 - d^2 = 0$). Damit haben wir $\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 1 \\ -2ab - b^2 = 0; 1 \text{ oder } -1 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 1 \\ 2a^2 + b^2 = 3; 2 \text{ oder } 1 \end{cases}$

Damit folgt, dass G_t der Stabilisator von $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ist.

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ permutiert die Zusammenhangskomponenten von T und $G_i \cup G_t$ bildet die Zusammenhangskomponente von T_0 auf sich ab. Nach Aufgabenteil a) erzeugen G_i und G_t aber schon die ganze Gruppe, denn $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also ist T zusammenhängend.

T hat keine Kreise:

Sei $z \in T_0$ und $\operatorname{Re} \gamma(z) = 0$. Wir zeigen $z = i$:

Wenn $c^2 - d^2 \neq 0$, dann liegt, wie zuvor gesehen, $\gamma(z)$ auf einem Kreis mit Radius $\frac{1}{|c^2-d^2|} \leq 1$ und Mittelpunkt $\frac{ac-bd}{c^2-d^2}$. Da der Kreis die Imaginäre Achse schneidet, muss $ac - bd < 1$ gelten, d.h. $ac - bd = 0$. Das bedeutet, dass die Vektoren $(a, -b)^T$ und $(c, d)^T$ senkrecht aufeinander stehen. Das Rechteck, das sie aufspannen hat somit Volumen $\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$, das ist aber 1, wegen $ad - bc = 1$. Also gilt $\gamma = \mathrm{id}$ oder $\gamma(z) = -\frac{1}{z}$. In beiden Fällen folgt $z = i$.

Wenn $c^2 = d^2$, gilt $c = d = 1$ oder $c = -d = 1$ (O.E. $c > 0$). Nach Voraussetzung gilt:

$$0 = \operatorname{Re}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \frac{ac|z|^2 + bd + \operatorname{Re} z(ad + bc)}{|cz + d|^2} \Rightarrow ac + bd + \operatorname{Re} z(ad + bc) = 0$$

Wenn $c = d = 1$, folgt daraus und aus $ad - bc = 1$

$$\begin{cases} (a + b)(\underbrace{\operatorname{Re} z}_{\in[0,\frac{1}{2}]} + 1) = 0 \\ a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

und damit $a = \frac{1}{2}$. Ähnlich folgt aus $c = -d = 1$, dass $a = -\frac{1}{2}$, im Widerspruch zu $a \in \mathbb{Z}$.

Angenommen, es gibt in T einen Kreis. Dann existiert ein Weg von i nach $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, der nicht durch T_0 geht. Da i eine Ecke von Valenz 2 ist (sieht man am Stabilisator von i) gibt es einen Weg von $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ nach $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, der nicht durch i geht (die andere Kante, die von i ausgeht, ist die zwischen i und $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$). Dieser Weg muss aber die Imaginäre Achse schneiden. Dies ist aber ein Widerspruch.

Aufgabe 3 c)

Die Gruppe, die von A und B erzeugt wird, operiert auf T, da sie eine Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist, und sie operiert frei, da die Stabilisatoren von i und $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ mit der Gruppe

$$\Gamma'(2) := \{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod 2\}$$

nur die Identität gemeinsam haben und $\Gamma(2) \leq \Gamma'(2)$ (hier gilt sogar Gleichheit). Mit dem Satz von Nielsen und Schreier folgt damit, dass $\Gamma(2)$ frei von A und B erzeugt wird.