

Geometrische Gruppentheorie – Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\Gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ eine Fuchsche Gruppe, $p \in \mathbb{H}$ ein Punkt, der für kein $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$ Fixpunkt ist, und $D_p(\Gamma)$ der dazugehörige Dirichlet-Bereich. Zeige, dass die Ecken von $D_p(\Gamma)$ - also die Schnittpunkte der geodätischen Segmente in $\partial D_p(\Gamma)$ - diskret in \mathbb{H} liegen.

Hinweis: Punkte auf dem Rand des Dirichlet-Bereichs erfüllen $d(p, x) = d(p, \gamma(x))$ für ein $\gamma \in \Gamma$, dies gilt insbesondere für Ecken.

Die Definition von "diskontinuierlich" aus A 1 (i), Blatt 7, ist auch hilfreich.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Für $z \in \mathbb{H}$ sei $f(z) = \frac{z-i}{-iz+1}$. Zeige:

- f bildet \mathbb{H} biholomorph auf $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ab.
- $d_{\mathbb{D}}(z, w) := d_{\mathbb{H}}(f^{-1}(z), f^{-1}(w))$ ist eine Metrik auf \mathbb{D} .
- Wie sehen die Geodätischen in \mathbb{D} aus?
- Sei $z \in \mathbb{H}$. Zeige, dass $\frac{2|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} = \frac{1}{\text{Im}(z)}$ gilt.
- Zeige, dass $d_{\mathbb{D}}$ durch die Metrik $\frac{2|dz|}{1-|z|^2}$ induziert wird. Genauer: Die hyperbolische Länge eines differenzierbaren Weges $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ sei als $l(\gamma) := \int_0^1 \frac{2|\frac{d\gamma(t)}{dt}|}{1-|\gamma(t)|^2} dt$ definiert. Dann gilt $d_{\mathbb{D}}(z, w) = \inf l(\gamma)$, wobei das Infimum über alle differenzierbaren Wege von z nach w gebildet wird.
- Was sind die orientierungserhaltenden Isometrien von \mathbb{D} ?
- Die Summe der Innenwinkel eines hyperbolischen Dreiecks ist kleiner als π .

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien α und $\beta \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$. Zeige:

- Ist $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$, so bildet α die Fixpunktmenge von β auf sich ab.
- Wenn α und β nicht die Identität sind, dann haben sie genau dann die gleiche Fixpunktmenge, wenn sie kommutieren.
- Gelten die Aussagen in a) und b) auch für $\alpha, \beta \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$?

Abgabe: am Donnerstag, den 23.12.2010 um 13:00 im blauen Einwurfkasten im ersten Stock des Allianzgebäudes bei den Seminarräumen.