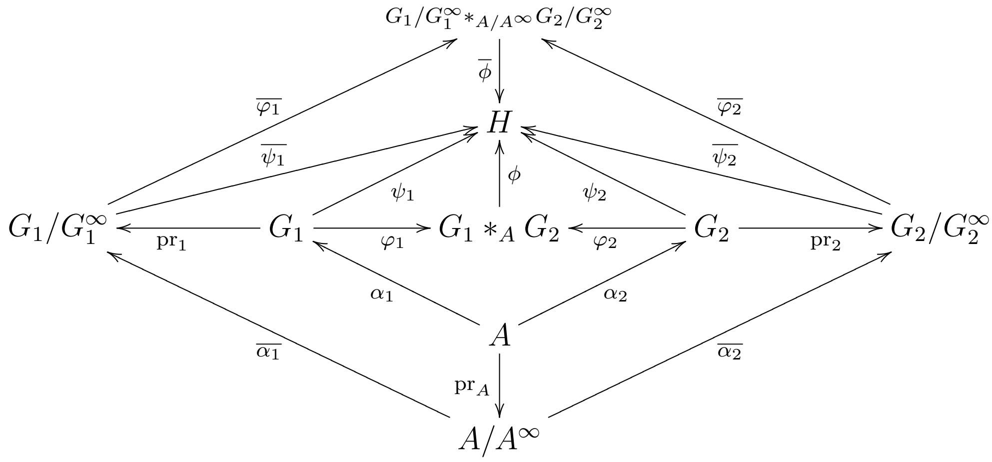
Geometrische Gruppentheorie – Lösungen zu Übungsblatt 14

Aufgabe 1

a) Die α_i's definieren Homomorphismen $\overline{\alpha_i} : {}^{A}\!/_{A^\infty} \to {}^{G_i}\!/_{G_i^\infty}, \overline{a} \mapsto \overline{\alpha_i(a)}$.
Diese sind wohldefiniert: Sei $a \in A^\infty \Rightarrow a \in A^n$ für ein $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha_i(a) \in G_i^n \subseteq G_i^\infty$.
Und sie sind injektiv: $\overline{\alpha_i(a)} = 1 \Rightarrow \alpha_i(a) \in G_i^\infty \Rightarrow \alpha_i(a) \in G^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow a \in \alpha_i^{-1}(G_i^n) \subseteq A^{n+1} \subseteq A^\infty \Rightarrow \overline{a} = 1$.

b) Unser Ziel ist es zu zeigen, dass die Gruppe $G_1/G_1^\infty *_{A/A^\infty} G_2/G_2^\infty$ die UAE erfüllt.



Die innere und die äußere Raute im Diagramm seien die Diagramme wie in der Definition der UAE, also insbesondere seien $\overline{\varphi_1}$ und $\overline{\varphi_2}$ so, dass

$$\overline{\varphi_1} \circ \overline{\alpha_1} = \overline{\varphi_2} \circ \overline{\alpha_2} \tag{1}$$

und dass für jede Gruppe H mit Homomorphismen $\overline{\psi_1} : G_1/G_1^\infty \to H$ und $\overline{\psi_2} : G_2/G_2^\infty \to H$ mit

$$\overline{\psi_1} \circ \overline{\alpha_1} = \overline{\psi_2} \circ \overline{\alpha_2} \tag{2}$$

es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\overline{\phi} : G_1/G_1^\infty *_{A/A^\infty} G_2/G_2^\infty \to H$ gibt mit

$$\overline{\varphi_1} \circ \overline{\phi} = \overline{\psi_1} \quad \text{und} \quad \overline{\varphi_2} \circ \overline{\phi} = \overline{\psi_2} \tag{3}$$

Analog dazu seien $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ und ϕ definiert.
<u>Beh. 1</u>: $\overline{\varphi_1} \circ \mathrm{pr}_1 \circ \alpha_1 = \overline{\varphi_2} \circ \mathrm{pr}_2 \circ \alpha_2$

<u>Beh. 2</u>: $\psi_1 = \overline{\psi_1} \circ \mathrm{pr}_1$ und $\psi_2 = \overline{\psi_2} \circ \mathrm{pr}_2$

Aus Beh. 1 folgt, dass $\overline{\varphi_i} \circ \mathrm{pr}_i$ die Bedingung (1) an φ_i erfüllt (jeweils für $i \in \{1, 2\}$). Damit erfüllen $\overline{\varphi_i} \circ \mathrm{pr}_i$ und $G_1/G_1^\infty *_{A/A^\infty} G_2/G_2^\infty$ jeweils die Existenzbedingung an φ_i und die Gruppe $G_1 *_A G_2$. Eine eindeutig bestimmte Abbildung nach H, die die UAE erfüllt existiert und lautet $\overline{\phi}$. Nach der Eindeutigkeit von $G_1 *_A G_2$ gilt damit $G_1/G_1^\infty *_{A/A^\infty} G_2/G_2^\infty \cong G_1 *_A G_2$; und aus Beh. 2 und mit $\mathrm{pr}_i \circ \alpha_i = \overline{\alpha_i}\, \mathrm{pr}_A$ (das ist der a)-Teil) folgt, dass eine Gruppe H die Voraussetzungen (2) und (3) bzgl. $\overline{\varphi_i}, \overline{\psi_i}, \overline{\alpha_i}$ und $\overline{\phi}$ genau dann erfüllt, wenn sie diese auch bzgl. $\varphi_i, \psi_i, \alpha_i$ und ϕ erfüllt.

<u>Bew. von Beh.1</u>: $\overline{\varphi_1} \circ \mathrm{pr}_1 \circ \alpha_1 \overset{a)}{=} \overline{\varphi_1} \circ \overline{\alpha_1} \circ \mathrm{pr}_A \overset{\text{Def.}\,\overline{\varphi_1},\overline{\varphi_2}}{=} \overline{\varphi_2} \circ \overline{\alpha_2} \circ \mathrm{pr}_A \overset{a)}{=} \overline{\varphi_2} \circ \mathrm{pr}_2 \circ \alpha_2$

<u>Bew. von Beh.2</u>: Wir zeigen zunächst, dass φ_1 über G_1^∞ faktorisiert (analog gilt das dann

auch für φ_2 über G_2^∞). Mittels vollständiger Induktion zeigen wir, dass aus $g \in G_1^n$ folgt, dass $\varphi_1(g) = 1$.
Für $n = 1$ stimmt die Aussage.
$n \curvearrowright n+1$: Für n gelte $(g \in G_1^n \Rightarrow \varphi_1(g) = 1)$ und $(g \in G_2^n \Rightarrow \varphi_2(g) = 1)$.
Sei $g \in G_1^{n+1}$: Dann $\exists a_1, ..., a_k \in A^{n+1}$ und $g_1, ..., g_k \in G_1$ mit $g = g_1\alpha_1(a_1)g_1^{-1} \cdots g_k\alpha_1(a_k)g_k^{-1}$
Wir müssen also zeigen, dass $\varphi_1 \circ \alpha_1(a_i) = 1 \;\; \forall i \in \{1, ..., k\}$.
$a_i \in A^{n+1} \Rightarrow \exists b_1, ..., b_m \in \alpha_1^{-1}(G_1^n) \cup \alpha_2^{-1}(G_2^n)$ und $c_1, ..., c_m \in A$ mit $a_i = c_1 b_1 c_1^{-1} \cdots c_m b_m c_m^{-1}$.
Für $b_j \in \alpha_1^{-1}(G_1^n)$ gilt aber $\alpha_1(b_j) \in G_1^n$ und somit nach Induktionsvoraussetzung $\varphi_1 \circ \alpha_1(b_j) = 1$.
Für $b_j \in \alpha_2^{-1}(G_2^n)$ gilt $\alpha_2(b_j) \in G_2^n$ und nach Induktionsvoraussetzung $\varphi_2 \circ \alpha_2(b_j) = 1$. Da aber $\varphi_2 \circ \alpha_2 = \varphi_1 \circ \alpha_1$, gilt auch in diesem Fall $\varphi_1 \circ \alpha_1(b_j) = 1$.
$\varphi_1 \circ \alpha_1(b_j) = 1 \; \forall j \in \{1, ..., m\} \Rightarrow \varphi_1 \circ \alpha_1(a_i) = 1$ und da das für alle $i \in \{1, ..., k\}$ gilt, folgt auch $\varphi_1(g) = 1$.
Damit folgt auch $\psi_i(G_i^\infty) = \phi \circ \varphi_i(G_i^\infty) = \phi(1) = 1$, d.h. ψ_i faktorisiert über G_i^∞, also $\psi_i = \overline{\psi_1} \circ \mathrm{pr}_i$.

Aufgabe 2
Sei Γ der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Baum aus der Vorlesung (Prop. 16.9), auf dem G operiert. Sei $x \in V(\Gamma)$ eine Ecke mit $G_x \cong G_1$. Für $g \in G$ gilt $d(g \cdot x, x) \leq l(g)$. Da aber l auf H beschränkt ist, operiert H damit auf einem Baum mit beschränktem Durchmesser. Mit A.3, Übungsblatt 4, folgt, dass H einen Fixpunkt hat, und da die Operation von H auf Γ inversionsfrei ist, folgt dass H eine Ecke fix lässt. Damit ist H entweder zu G_1 oder zu G_2 konjugiert.

Aufgabe 3

a) Gesucht ist eine Gruppe $G := \mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ und Abbildungen $f_1, f_2 : \mathbb{Z} \to G$, so dass für jede Gruppe H mit Homomorphismen $\psi_1 : \mathbb{Z} \to H$ und $\psi_2 : \mathbb{Z} \to H$ so dass $\psi_1 \circ \mathrm{id} = \psi_2 \circ \mathrm{id}$, d. h. also mit $\psi_1 = \psi_2 =: \psi$, es ein Eindeutig definiertes ϕ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutitert:

$$\begin{tikzcd}
& H & \\
\mathbb{Z} \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, "f_1"] & G \arrow[u, "\phi"] & \mathbb{Z} \arrow[ul, "\psi"'] \arrow[l, "f_2"'] \\
& \mathbb{Z} \arrow[ul, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

$G = \mathbb{Z}$ und $f_1 = f_2 = \mathrm{id}$ erfüllt dies. Das eindeutig bestimmte ϕ heißt dann ψ.

b) Nun betrachte $\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ mit $\alpha_1(z) = 2z$ und $\alpha_2(z) = 4z$.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} & \\
\mathbb{Z} \arrow[ur, "f_1"] & & \mathbb{Z} \arrow[ul, "f_2"'] \\
& \mathbb{Z} \arrow[ul, "z \mapsto 2z"] \arrow[ur, "z \mapsto 4z"'] &
\end{tikzcd}$$

Angenommen $\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$: Dann gibt es $f_1, f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, so dass obiges Diagramm kommutativ ist. Da f_2 als Homomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die Form $z \mapsto kz$ haben muss, ist wegen der

Kommutativität f_1 durch $z \mapsto 2kz$ gegeben. Wählt man nun $H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\psi_1 \neq 0$ und $\psi_2 = 0$ mit $\psi_1 \circ \alpha_1 = \psi_2 \circ \alpha_2$ (die gibt es!), so gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit

$$\bar{1} = \psi_1(1) = \phi \circ f_1(1) = \phi(2k) = \phi \circ f_2(2) = \psi_2(2) = \bar{0}.$$

Dies ist ein Widerspruch.

Aufgabe 4

Da α_1 und α_2 injektiv sind, können wir A als Untergruppe von G_1, bzw. G_2 auffassen. Da zudem die Gruppen G_1 und G_2 abelsch sind, ist A jeweils ein Normalteiler darin.
Sei V_1 ein Vertretersystem der Nebenklassen von A in G_1 mit $1_{G_1} \in V_1$ und V_2 ein entsprechendes Vertretersystem in G_2, und $a \in A$. Jedes Element in $G_1 *_A G_2$ lässt sich eindeutig in der Form $ag_1h_1 \cdots g_nh_n$ schreiben mit $g_1, ..., g_n \in V_1$, $h_1, ..., h_n \in V_2$ und $a \in A$. Da A ein Normalteiler in G_1 und in G_2 ist, gilt

$$(ag_1h_1 \cdots g_nh_n)(a'g_1'h_1' \cdots g_m'h_m') = aa'g_1h_1 \cdots g_nh_ng_1'h_1' \cdots g_m'h_m'$$

d.h., das a' kann nach links gezogen werden, ohne dass sich die Vertreter $g_1, h_1, ..., g_n, h_n$ ändern, es kann höchstens passieren, dass $h_n = 1$ oder $g_1' = 1$.
Wir haben somit einen surjektiven Homomorphismus

$$\begin{array}{rccc} \pi : & G_1 *_A G_2 & \to & G_1/A * G_2/A \\ & ag_1h_1 \cdots g_nh_n & \mapsto & \overline{g_1}\overline{h_1} \cdots \overline{g_n}\overline{h_n} \end{array}$$

mit $\operatorname{Kern} \pi = A$. (Es gilt $(G_1 *_A G_2)/A = G_1/A * G_2/A$.)
Laut Vorlesung hat die Gruppe $G_1/A * G_2/A$ eine freie Untergruppe H (den Kern der Abbildung $\rho : G_1/A * G_2/A \to G_1/A \times G_2/A$) und da G_1/A und G_2/A endlich sind, hat H endlichen Index in $G_1/A * G_2/A$ und ist endlich erzeugt.
Seien $\overline{x_1}, ..., \overline{x_k} \in G_1/A * G_2/A$ freie Erzeuger von H und $x_1 \in \pi^{-1}(\overline{x_1}), ..., x_k \in \pi^{-1}(\overline{x_k})$. Die Gruppe F, die von $x_1, ..., x_k$ erzeugt wird, ist ebenfalls frei (denn gäbe es eine Relation in F, dann gäbe es diese Relation auch in $\pi(F) = H$). Es ist also nur noch zu zeigen, dass F endlichen Index in $G_1 *_A G_2$ hat. Außerdem gilt $[\pi^{-1}(H) : F] = |A|$.

<u>Beh:</u> Es gilt $[G_1 *_A G_2 : \pi^{-1}(H)] = [G_1/A * G_2/A : H]$.
Denn: Sei $V_H = \{\overline{g_1}, ..., \overline{g_m}\}$ ein Vertretersystem von H in $G_1/A * G_2/A$ und seien

$$g_1 \in \pi^{-1}(\overline{g_1}), ..., g_m \in \pi^{-1}(\overline{g_m}).$$

Dann ist $\{g_1, ..., g_m\}$ ein Vertretersystem von $\pi^{-1}(H)$ in $G_1 *_A G_2$. Denn für $x \in G_1 *_A G_2$ gilt $\pi(x) = \overline{g_i}h$ für ein $h \in H \Rightarrow x \in \pi^{-1}(\overline{g_i}h)$ und da π surjektiv ist, folgt $x = g_i'h'$ für $h' \in \pi^{-1}(H)$ und $g_i' \in \pi^{-1}(\overline{g_i})$, d.h. $g_i' = ag_i$ für ein $a \in A \Rightarrow x = g_iah' \in g_i\pi^{-1}(H)$. Damit ist das Vertretersystem von $\pi^{-1}(H)$ in $G_1 *_A G_2$ schon mal in $\{g_1, ..., g_m\}$ enthalten, es ist also noch zu zeigen, dass g_i und g_j für $i \neq j$ in verschiedenen Nebenklassen von $\pi^{-1}(H)$ liegen. Das tun sie aber, sonst wäre $g_i \in g_j\pi^{-1}(H) \Rightarrow \overline{g_i} \in \overline{g_j}H$, was nicht sein kann.

Mit der Behauptung folgt
$[G_1 *_A G_2 : F] = [G_1 *_A G_2 : \pi^{-1}(H)] \cdot [\pi^{-1}(H) : F] = [G_1/A * G_2/A : H] \cdot |A| < \infty.$

Bemerkung: Anstatt zu fordern, dass G_1 und G_2 abelsch sind, hätte auch die Forderung gereicht, dass A ein Normalteiler in G_1 und G_2 ist.