Quasi-Isometrien

Definition 1
Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) zwei metrische Räume und sei $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ eine Abbildung, sowie $\lambda, c \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ und $c \geq 0$.

a) f heißt (λ, c)***-quasi-isometrische Einbettung***, wenn $\forall a, b \in X_1$ gilt:

$$\frac{1}{\lambda} d_1(a,b) - c \leq d_2(f(a), f(b)) \leq \lambda d_1(a,b) + c.$$

f heißt ***quasi-isometrische Einbettung***, wenn es λ und c wie oben gibt.

b) f heißt (λ, c)***-streng-quasi-isometrische Einbettung***, wenn $\forall a, b \in X_1$ gilt:

$$\frac{1}{\lambda} d_1(a,b) - c \leq d_2(f(a), f(b)) \leq \lambda d_1(a,b).$$

f heißt ***streng-quasi-isometrische Einbettung***, wenn es λ und c wie oben gibt.

c) f heißt ***quasi-surjektiv***, wenn ein $D \geq 0$ existiert, so dass

$$\forall x_2 \in X_2 : d_2(f(X_1), x_2) := \inf\{d_2(f(x_1), x_2) \mid x_1 \in X_1\} < D.$$

d) f heißt ***Quasi-Isometrie***, wenn f eine quasi-isometrische Einbettung, die quasi-sujektiv ist.
Schreibe $X_1 \sim_{q.i.} X_2$, wenn eine Quasi-Isometrie $f : X_1 \to X_2$ existiert.

Beispiele

1. $\mathbb{R} \sim_{q.i.} \mathbb{Z}$ (Euklidische Metrik).
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ definiert durch $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Dies ist eine quasi-isometrische Einbettung, denn $|x-y|-1 \leq ||\lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor|| \leq |x-y| + 1$. Sie ist auch quasi-surjektiv, da sie surjektiv ist.

2. $\mathbb{Z} \sim_{q.i.} \mathbb{R}$ (Euklidische Metrik).
$g : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ ist eine isometrische Einbettung, also sogar eine streng-quasi-isometrische Einbettung. Sie ist auch quasi-surjektiv, da $\forall x \in \mathbb{R} : d(g(\mathbb{Z}), x) \leq \frac{1}{2}$.

3. Sei (X, d) ein beschränkter metrischer Raum (z.B. der Cayley-Graph einer endlichen Gruppe) und $\{P\}$ der einpunktige metrische Raum sei. Dann gilt $X \sim_{q.i.} \{P\}$.
Die konstante Abbildung $c : X \to \{P\}$ ist eine streng-quasi-isometrische Einbettung:

$$d(x,y) - D_X \leq d(c(x), c(y)) = 0 \leq d(x,y), \quad D_X := \text{Durchmesser von } X.$$

Quasi-surjektiv ist sie auch, da sie surjektiv ist.

Bemerkung 1

a) Isometrien sind Quasi-Isometrien (setze $\lambda = 1, c = 0$) und aus "surjektiv" folgt "quasi-surjektiv".

b) Streng-quasi-isometrische Einbettungen sind stetig.

c) Quasi-isometrische Einbettungen sind i.A. nicht stetig.

Beweis

b) Sei $U \in X_2$ offen. Zu Zeigen: $V := f^{-1}(U)$ ist offen. Sei $x_1 \in V$. Dann existiert ein $x_2 \in U$ mit $f(x_1) = x_2$. Da U offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x_2) \subseteq U$. Sei nun $y \in B_{\frac{\varepsilon}{\lambda}}(x_1) \in X_1$. Dann gilt $d_2(x_2, f(y)) < \lambda d_1(x_1, y) \leq \lambda \frac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon \Rightarrow f(y) \in U \Rightarrow y \in V$.

c) In Beispiel 1 oben ist f nicht stetig, da $\{0\}$ zwar offen in $\mathbb{Z}$, aber $f^{-1}\{0\} = [0, 1)$ nicht offen in $\mathbb{R}$ ist.□

Satz 1
Quasi-isometrisch zu sein ist eine Äquivalenzrelation zwischen metrischen Räumen.

Beweis
Reflexivität: klar ($f = \mathrm{id}$).
Transitivität: Übung.
Symmetrie: Sei $(X_1, d_1) \sim_{q.i.} (X_2, d_2)$ und sei $f : X_1 \to X_2$ eine quasi-surjektive $(\lambda, c)-$quasi-isometrische Einbettung. Es gilt somit:

$$\frac{1}{\lambda} d_1(x_1, y_1) - c \leq d_2(f(x_1), f(y_1)) \leq \lambda d_1(x_1, y_1) + c$$

und daraus folgt :

$$\frac{1}{\lambda} d_2(f(x_1), f(y_1)) - \frac{c}{\lambda} \leq d_1(x_1, y_1) \leq \lambda d_2(f(x_1), f(y_1)) + c\lambda \tag{1}$$

Da f quasi-surjektiv ist, existiert ein $D > 0$, sodass $\forall x_2 \in X_2 : d_2(f(X_1), x_2) < D$. Damit können wir folgendermaßen eine Abbildung $g : X_2 \to X_1$ definieren:
Für jedes $x_2 \in X_2$ wählen einen Punkt $g(x_2) \in X_1$ mit $d_2(f(g(x_2)), x_2) < D$ als seinen Bildpunkt.

g ist eine quasi-isometrische Einbettung:

$$d_1(g(x_2), g(y_2)) \overset{(1)}{\leq} \lambda d_2(f(g(x_2)), f(g(y_2))) + c\lambda \overset{\Delta-\text{Ungl.}}{\leq} \lambda(d_2(x_2, y_2) + 2D) + c\lambda$$
$$d_1(g(x_2), g(y_2)) \overset{(1)}{\geq} \frac{1}{\lambda} d_2(f(g(x_2)), f(g(y_2))) - \frac{c}{\lambda} \overset{\Delta-\text{Ungl.}}{\geq} \frac{1}{\lambda}(d_2(x_2, y_2) - 2D) - \frac{c}{\lambda}$$

Insgesamt folgt:

$$\frac{1}{\lambda} d_2(x_2, y_2) - \frac{c + 2D}{\lambda} \leq d_1(g(x_2), g(y_2)) \leq \lambda d_2(x_2, y_2) + \lambda(c + 2D)$$

Damit ist g eine (λ, c_g)-quasi-isometrische Einbettung für $c_g := \max\{\frac{c+2D}{\lambda}, \lambda(c + 2D)\}$.

g ist quasi-surjektiv: Sei $x_1 \in X_1$ beliebig:

$$d_1(x_1, g(f(x_1))) \overset{(1)}{\leq} \lambda d_2(f(x_1)), f(g(f(x_1)))) + \lambda c \overset{\text{Def. von } g}{\leq} \lambda D + \lambda c$$

□

Bemerkung 2
Streng-quasi-isometrisch zu sein ist dagegen keine Äquivalenzrelation.

Beweis
In Beispiel 2 haben wir gesehen, dass es eine strenge Quasi-Isometrie $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ gibt. Wenn es aber eine strenge Quasi-Isometrie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ gäbe, so müsste diese nach Bemerkung 1b stetig sein. Da $\mathbb{R}$ zusammenhängend ist, müsste dann aber auch $f(\mathbb{R})$ zusammenhängend sein. Das geht aber nur, wenn f konstant ist, und dann ist f keine quasi-isometrische Einbettung. □