Karlsruher Institut für Technologie (KIT) 24.06.2011
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Diego De Filippi

Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 11

Aufgabe 1

Zeige, dass für eine punktierte Fläche der Homomorphismus

$$\mathrm{Mod}^{\pm}(S_{g,n}) \to \mathrm{Out}(\pi_1(S_{g,n}))$$

kein Isomorphismus ist.

Aufgabe 2

Gegeben sei eine Fläche S_g. Wir identifizieren die freien Homotopieklassen von geschlossenen Kurven in S_g mit den Konjugationsklassen in $\pi_1(S_g, x_0)$.
Seien γ_1 und γ_2 Homotopieklassen von geschlossenen nicht nullhomotopen Kurven. Zeige:

a) γ_1 ist genau dann einfach geschlossen, wenn je zwei Vertreter $\gamma', \gamma'' \in \pi_1(S_g, x_0)$ von γ_1 nicht verschränkt sind.

b) $i(\gamma_1, \gamma_2) = 1$ gilt genau dann, wenn es für jeden Vertreter $\tilde{\gamma_2} \in \pi_1(S_g, x_0)$ von γ_2 einen mit $\tilde{\gamma_2}$ verschränkten Vertreter $\tilde{\gamma_1} \in \pi_1(S_g, x_0)$ von γ_1 gibt, so dass die Menge der Vertreter von γ_1, die mit $\tilde{\gamma_2}$ verschränkt sind, genau aus den $\tilde{\gamma_2}^k \tilde{\gamma_1} \tilde{\gamma_2}^{-k}$ $(k \in \mathbb{Z})$ besteht.

Aufgabe 3

Auf der Fläche S_g sei eine Kette $c_1, \ldots, c_{2g}$ von einfach geschlossenen Kurven gegeben (siehe Vorlesung), sowie ein System $\gamma_1, ..., \gamma_{2g} \in \pi_1(S_g, x_0)$ von Vertretern der entsprechenden Konjugationsklassen. Außerdem sei $\Phi \in \mathrm{Out}(\pi_1(S_g))$ und $f \in \mathrm{Homeo}^{\pm}(S_g)$, so dass die freie Homotopieklasse von $f_*(\gamma_i)$ gerade $\Phi(c_i)$ ist ($\forall\ i = 1, \ldots, 2g$).
Zeige: Für die Abbildung $\sigma_g : \mathrm{Mod}^{\pm}(S_g) \to \mathrm{Out}(\pi_1(S_g))$ gilt $\sigma_g([f]) = \Phi$.

Erinnerung: Die Bilder von zwei zueinander konjugierten Elementen aus $\pi_1(S_g, x_0)$ unter einem Automorphismus sind wieder zueinander konjugiert.
Damit kann man $\Phi(c_i)$ folgendermaßen definieren: Sei $\varphi \in \mathrm{Aut}(\pi_1(S_g, x_0))$ ein Vertreter von $\Phi \in \mathrm{Out}(\pi_1(S_g))$ und $\gamma_i \in \pi_1(S_g, x_0)$ sei ein Vertreter der Konjugationsklasse c_i.
Dann sei $\Phi(c_i)$ die Konjugationsklasse von $\varphi(\gamma_i)$.
Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von φ und γ_i.

Die Aufgaben werden in der Übung am Mittwoch, 29.06.2011, besprochen.