Karlsruher Institut für Technologie (KIT) 01.07.2011
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Diego De Filippi

Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 12

Eine dreifach zusammenhängende (berandete) Riemannsche Fläche heißt **Hose**.

Aufgabe 1

Zeige, dass es für alle Zahlentripel (a_1, a_2, a_3) von positiven reellen Zahlen eine Hose mit geodätischen Randkomponenten L_1, L_2 und L_3 gibt, so dass

$$\ell(L_i) = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Hinweis: Konstruiere einen (Teil-)Fundamentalbereich in $\mathbb{D}$, der u.A. von geodätischen Segmenten der Länge $\frac{a_i}{2}$ begrenzt wird. Die dazugehörige Fuchssche Gruppe wird von zwei Elementen erzeugt, die jeweils die Verknüpfung von zwei Spiegelungen an Geodätischen, die senkrecht auf den Lifts von zwei der L_i stehen, sind.

Aufgabe 2

Sei S eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$. Zeige folgende Aussagen:

a) Wenn man S entlang von einfach geschlossenen geodätischen Kurven aufschneidet, bis im Inneren von jeder Zusammenhangskomponente keine weitere einfach geschlossene geodätische Kurve übrig bleibt, sind die Zusammenhangskomponenten der aufgeschnittenen Fläche allesamt Hosen.

   Bemerkung: So etwas nennt man dann eine **Hosenzerlegung** von S.
   Hosenzerlegungen sind nicht eindeutig (Beispiel?).

b) Sei M die Anzahl der Zusammenhangskomponenten einer Hosenzerlegung von S und N sei die Anzahl der geodätischen Kurven, an denen S bei der Hosenzerlegung aufgeschnitten wird. Dann gilt:

$$N = 3g - 3, \quad M = 2g - 2$$

Aufgabe 3

Sei S eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$. Wir betrachten ein Element $\gamma \in \pi_1(S) \cong \mathrm{Deck}(\mathbb{H}/S) \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ mit

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1$$

und bezeichnen mit L_γ die geodätische Kurve, die zu γ frei homotop ist. Zeige:

$$\mathrm{Spur}^2(\gamma) = (a+d)^2 = 4\cosh^2\left(\frac{\ell(L_\gamma)}{4}\right)$$

Die Aufgaben werden in der Übung am Mittwoch, 06.07.2011, besprochen.