KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
PROF. DR. F. HERRLICH
DIEGO DE FILIPPI

12.07.2011

Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 13

Aufgabe 1

Seien $U, V, W \in \mathbb{C}$ offen und $g : U \to V$, $f : V \to W$ zwei reell differenzierbare Abbildungen. Zeige, dass für die Dilatationen folgendes gilt:

a) $K_{f\circ g} \leq K_f K_g$.

b) g ist holomorph $\Rightarrow K_{f\circ g} = K_f$.

Aufgabe 2

Für $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ betrachten wir die Abbildung

$$\varphi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

wobei hier $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert wird.

a) Zeige, dass die Abbildung

$$\iota : \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{H}, \qquad \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cdot A \mapsto -\overline{A^{-1}(i)}$$

bijektiv ist. Dabei ist mit $A(z)$ die Operation durch Möbiustransformationen gemeint.

b) Für $D_K := \begin{pmatrix} \sqrt{K} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{K}} \end{pmatrix}$, $(K \geq 1)$ gilt $d(\iota(D_K), \iota(I)) = \log(K)$ und die Dilatation von φ_{D_K} ist K.

c) Jede Matrix $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $A \notin \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ lässt sich bis auf das Vorzeichen in eindeutiger Weise schreiben als $A = O_1 D_K O_2$ mit $O_1, O_2 \in \mathrm{SO}_2(R)$.

d) Seien $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $AB^{-1} \notin \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ und $AB^{-1} = O_1 D_K O_2$.
Dann hat $\varphi_{AB^{-1}}$ Dilatation K.

Aufgabe 3

Seien $Q := [0,1] \times [0,1]$, $Q_K := [0,K] \times [0,1]$, $(K \geq 1)$ und $f : Q \to Q_K$ eine quasikonforme Abbildung, die die Seiten respektiert, und sei $K_f = K$. Zeige, dass f die affine Abbildung $(x, y) \mapsto (Kx, y)$ ist.

Die Aufgaben werden in der Übung am Mittwoch, 13.07.2011, besprochen.