Karlsruher Institut für Technologie (KIT) 21.04.2011
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Diego De Filippi

Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Ein Teilbaum eines $\mathbb{R}$-Baums T ist eine Teilmenge $T' \subseteq T$ die (mit der von T induzierten Metrik) wieder ein $\mathbb{R}$-Baum ist.

Seien $T_1, \ldots, T_m$ Teilbäume eines $\mathbb{R}$-Baums T, so dass $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ für $1 \leq i, j \leq m$ gilt. Zeige, dass dann auch

$$\bigcap_{1 \leq i \leq m} T_i$$

ein nichtleerer Teilbaum von T ist.

Aufgabe 2

Sei (X, d) ein 0-hyperbolischer (nicht notwendig geodätischer) metrischer Raum.

a) Betrachte auf der Menge

$$Y := \{(x, r) \mid x \in X, 0 \leq r \leq d(w, x)\}$$

die Relation $(x, r) \sim (y, s) \iff r = s$ und $(x.y)_w \geq r$, wobei w ein beliebiger, fest gewählter Punkt in X ist. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Zeige, dass durch

$$d((x, r), (y, s)) := r + s - 2\min\{r, s, (x.y)_w\}$$

eine Pseudometrik auf Y gegeben ist.

Hinweis: Für eine Pseudometrik fordert man, wie bei einer Metrik, Symmetrie und Transitivität, aber an Stelle von

$$(x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0)$$

fordert man lediglich

$$(x = y \Rightarrow d(x, y) = 0).$$

c) Zeige, dass $Y/\sim$ ein $\mathbb{R}$-Baum ist (mit der von d induzierten Metrik) und dass

$$\phi : X \to Y/\sim, x \mapsto [x, d(x, w)]$$

eine isometrische Einbettung ist, wobei $[x, r]$ die Äquivalenzklasse von (x, r) sei.

Aufgabe 3

Sei $X = \mathbb{R} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ versehen mit der von der Euklidischen Metrik induzierten Metrik d. Ist (X, d) hyperbolisch? Begründe Deine Antwort!

Die Aufgaben werden in der Übung am Mittwoch, 27.04.2011 besprochen.