Karlsruher Institut für Technologie (KIT) 29.04.2011
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Diego De Filippi

Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 3

Aufgabe 1
Sei (X, d) ein geodätischer metrischer Raum und $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Dazu definieren wir einen Graphen Γ_t (den sog. *Rips-Graphen*) wie folgt:

- Die Eckenmenge sei $V(\Gamma_t) = X$
- $v_1, v_2 \in V(\Gamma_t) = X$ sind durch eine Kante verbunden $:\Leftrightarrow 0 < d(v_1, v_2) \leq t$

Auf Γ_t definieren wir zudem eine Metrik, sodass jede Kante die Länge t hat.

Zeige, dass die natürliche Einbettung $\Phi : X \to \Gamma_t, x \mapsto x$ eine Quasi-Isometrie ist.
Ist Φ auch eine strenge Quasi-Isometrie?

Aufgabe 2
Seien (X, d_1) und (Y, d_2) geodätische metrische Räume und sei $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ eine streng quasi-isometrische Einbettung.
Zeige: Wenn (Y, d_2) hyperbolisch ist, dann auch (X, d_1).

Aufgabe 3
Sei $\phi : T \to T$ eine Isometrie des $\mathbb{R}$-Baums T. Wir definieren die *Translationslänge* von ϕ als $\ell(\phi) := \inf_{x \in T} d(x, \phi(x))$. Ist $\ell(\phi) > 0$, so nennt man ϕ eine *hyperbolische Isometrie*, andernfalls eine *elliptische Isometrie*. Sei ϕ hyperbolisch.

a) Für ein $x \in T$ seien die Mediane $m := m(x, \phi(x), \phi^{-1}(x))$ und $\tilde{m} := m(\phi(x), \phi^2(x), x)$ gegeben. Zeige, dass $m \neq \tilde{m}$.

   Hinweis: Zeige zunächst, dass der Mittelpunkt von $[x, \phi(x)]$ nicht auf dem Teilsegment $[x, m]$ liegt.

b) Zeige, dass die Menge

$$C_\phi := \{x \in T \mid d(x, \phi(x)) = \ell(\phi)\}$$

   ein nichtleerer, ϕ-invarianter, abgeschlossener Teilbaum von T ist und dass eine Isometrie $\lambda : C_\phi \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ existiert, so dass $\lambda(\phi(x)) = \lambda(x) + \ell(\phi)$ für alle $x \in C_\phi$ gilt.

   Hinweis: Sei $\beta := [m, \tilde{m}]$. Zeige, dass $C_\phi := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \phi^k(\beta)$.

Die Aufgaben werden in der Übung am Mittwoch, 04.05.2011 besprochen.