Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Diego De Filippi

13.05.2011

Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 5

Aufgabe 1
In der Vorlesung kam das folgende Lemma dran:

Sei (X, d) ein δ-schlank-hyperbolischer metrischer geodätischer Raum, $c : [a, b] \to X$ eine k-lokale Isometrie für ein $k > 8\delta$ und $\sigma := [c(a), c(b)]$ eine Geodätische von $c(a)$ nach $c(b)$. Dann gilt $p := \text{Bild}(c) \subseteq U_{2\delta}([c(a), c(b)])$.

Für den Beweis hatten wir einen Punkt $x := c(t)$ auf p mit maximalem Abstand von σ gewählt und die Aussage bewiesen für den Fall, dass $t - a \leq 4\delta$ und $b - t \leq 4\delta$, sowie für den Fall, dass $t - a > 4\delta$ und $b - t > 4\delta$.
Beweise die Aussage für die fehlenden Fälle.

Aufgabe 2
Gegeben sei $G = \langle x, y \mid r_1 := x^2, r_2 := y^3, r^3 := xy^{-1}xy^{-1} \rangle$.

a) Welche Gruppe ist das?

b) Ist das eine Dehn-Präsentation? Falls ja, wieso? Falls nein, gibt es eine Dehn-Präsentation dieser Gruppe?

c) Finde für dein Lieblingswort w mit $\pi(w) = 1_G$ (vielleicht nicht gerade das leere Wort!) zwei verschiedene Zerlegungen der Form $\Pi_{i=1}^k w_i r_i^{\pm 1} w_i^{-1}$.

d) Gegeben sei folgende Präsentation $\langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle$ von $\mathbb{Z}^2$.
Berechne $A(w)$ für $w = x^2yx^{-2}y^{-2}x^{-2}yx^2$.

Aufgabe 3
Gegeben sei eine Präsentation $G = \langle X \mid R \rangle$. Zeige:

$$w \in \langle\langle R \rangle\rangle,\ \text{d.h. } w = \Pi_{i=1}^k w_i r_i^{\pm 1} w_i^{-1} \text{ mit } w_i \in F(X), r_i \in R \Leftrightarrow \exists \text{ Dehn-Diagramm zu } w$$

Für das entsprechende Dehn-Diagramm gilt $Area(D) := \sharp\text{beschränkter Zellen} = k$

Die Aufgaben werden in der Übung am Mittwoch, 18.05.2011 besprochen.