Karlsruher Institut für Technologie (KIT) 20.05.2011
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Diego De Filippi

Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 6

Aufgabe 1
Auf dem Übungsblatt 5, GGT I, wurde für einen metrischen Raum (X, d) die Gruppe

$$\mathcal{QI}(X) := \{f : X \to X \mid f \text{ ist Quasi-Isometrie}\}/\sim$$

eingeführt, wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ folgendermaßen definiert war:

$$f \sim g :\Leftrightarrow \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) < \infty$$

Isometrien sind insbesondere auch Quasi-Isometrien. Somit können wir den natürlichen Homomorphismus $\Psi : \text{Isom}(X) \to \mathcal{QI}(X), f \mapsto [f]_\sim$ betrachten.
Zeige oder widerlege:

a) $\Psi : \text{Isom}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{QI}(\mathbb{R}^2)$ ist injektiv.

b) $\Psi : \text{Isom}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{QI}(\mathbb{R}^2)$ ist surjektiv.

c) $\Psi : \text{Isom}(\mathbb{H}) \to \mathcal{QI}(\mathbb{H})$ ist injektiv.

Aufgabe 2 (*kompakt-offene Topologie*)
Seien X und Y zwei topologische Räume. Auf der Menge $\mathcal{C}(X, Y)$ der stetigen Abbildungen von X nach Y definieren wir die Topologie, die von den folgenden Mengen erzeugt wird:

$$\Omega(K, U) := \{f \in \mathcal{C}(X, Y) \mid f(K) \subseteq U\}, \text{ wobei } K \subseteq X \text{ kompakt und } U \subseteq Y \text{ offen.}$$

D.h. die offenen Mengen sind alle beliebigen Vereinigungen von endlichen Durchschnitten der Mengen $\Omega(K, U)$. Diese Topologie nennt man die ***kompakt-offene Topologie***.

Gegeben sei nun eine Fläche X. Zeige, dass die Elemente der Abbildungsklassengruppe bijektiv den Wegzusammenhangskomponenten in $\text{Homeo}(X) \subseteq \mathcal{C}(X, X)$ bezüglich der kompakt-offenen Topologie entsprechen.

Aufgabe 3
Bestimme die Abbildungsklassengruppe des Kreisringes $A := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2\}$.

Die Aufgaben werden in der Übung am Mittwoch, 25.05.2011, besprochen.