Karlsruher Institut für Technologie (KIT) 01.06.2011
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Diego De Filippi

Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 8

Aufgabe 1

Gegeben sei eine Fläche S mit markierten Punkten $p_1, ..., p_n$ und sei

$$P\,\mathrm{Homeo}^+(S) := \{f : S \to S \mid f \in \mathrm{Homeo}^+(S), f(p_i) = p_i \ \forall i\}$$

Für ein $x \in S \backslash \{p_1, ..., p_n\}$ sei weiterhin $P\,\mathrm{Homeo}^+(S, x)$ die Untergruppe von $P\,\mathrm{Homeo}^+(S)$ mit $f(x) = x$ und es sei die Abbildung $\pi : P\,\mathrm{Homeo}^+(S) \to S, f \mapsto f(x)$ gegeben, sowie eine Umgebung U von x, die homöomorph zu einer Kreisscheibe ist. Für jedes $u \in U$ sei $\varphi_u : U \to U$ ein orientierungserhaltender Homöomorphismus mit $\varphi_u(x) = u$. Die φ_u seien so gewählt, dass $(U \to \mathrm{Homeo}^+(U), u \mapsto \varphi_u)$ stetig ist.
Zeige, dass die Abbildung

$$U \times P\,\mathrm{Homeo}^+(S, x) \to \pi^{-1}(U), (u, \psi) \mapsto \varphi_u \circ \psi$$

ein Homöomorphismus mit Umkehrabbildung $\chi \mapsto (\chi(x), \varphi^{-1}_{\chi(x)} \circ \chi)$ ist.

Aufgabe 2

Auf einer Fläche S seien $\alpha_1, ..., \alpha_n$ einfach geschlossene, nicht nullhomotope und paarweise nicht homotope Kurven gegeben. Seien zudem β und β' zwei weitere einfach geschlossene Kurven, die $\bigcup_{i=1}^n \alpha_i$ nicht schneiden und zu keinem α_i homotop sind.
Zeige: Wenn β und β' in S isotop sind, dann sind sie auch in $S \setminus \bigcup_{i=1}^n \alpha_i$ isotop.

Aufgabe 3

Sei Γ ein zusammenhängender Graph und sei $G \leq \mathrm{Isom}(\Gamma)$ eine Gruppe, die auf den Ecken von Γ, sowie auf der Menge

$$\{(x, y) \mid x, y \in V(\Gamma), \exists e \in E(\Gamma) \text{ mit } i(e) = x, t(e) = y\}$$

transitiv operiert. Seien v und w zwei Ecken, die durch eine Kante verbunden sind, und sei $h \in G$ mit $h(w) = v$ gegeben.
Zeige, dass G von h und dem Stabilisator von v in G erzeugt wird.

Hinweis: Induktion über die Länge eines Pfades von v nach $g(v)$ für $g \in G$.

Die Aufgaben werden in der Übung am Mittwoch, 08.06.2011, besprochen.