Vorlesung GGT II (07.06.2011 und 09.06.2011)

Kulturbeitrag 1 Sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$. Für $n \geq 0$ sei $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ die n-Sphäre und $e_0^{(n)} := (1, 0, \ldots, 0) \in S^n$.
Für $n \geq 1$ kann man auf

$$\pi_n(X, x_0) := \{\varphi : S^n \to X, \varphi \text{ stetig }, \varphi(e_0^{(n)}) = x_0\} / \simeq$$

eine Addition erklären, die π_n zu einer abelschen Gruppe macht.
$\pi_n(X, x_0)$ heißt ***n-te Homotopiegruppe von** X* (zum Basispunkt x_0).
$\pi_1(X, x_0)$ ist die bereits bekannte Fundamentalgruppe und $\pi_0(X, x_0)$ ist definiert als die Menge der stetigen Einbettungen eines Punktes in X modulo Homotopie. $\pi_0(X, x_0)$ ist damit unabhängig von x_0 und, da eine Homotopie zwischen zwei Einbettungen eines Punktes einem Weg zwischen den beiden Bildpunkten entspricht, kann man $\pi_0(X, x_0)$ mit den Wegzusammenhangskomponenten von X identifizieren.

Kulturbeitrag 2 Jedes Faserbündel $p : B \to X$ mit Faser F induziert eine lange exakte Homotopiesequenz

$$\ldots \to \pi_n(F, b_0) \to \pi_n(B, b_0) \to \pi_n(X, x_0) \to \pi_{n-1}(F, b_0) \to \pi_{n-1}(B, b_0) \to \pi_{n-1}(X, x_0) \to \ldots$$

$$\to \pi_1(F, b_0) \to \pi_1(B, b_0) \to \pi_1(X, x_0) \to \pi_0(F, b_0) \to \pi_0(B, b_0) \to \pi_0(X, x_0)$$

Dabei sei $F = p^{-1}(x_0)$ und $b_0 \in F$. Auf $\pi_0(X)$ ist dabei zwar keine Gruppenstruktur definiert; Exaktheit lässt sich hier allerdings wie sonst definieren, d.h. dass das Bild der einen Abbildung im Kern der nächsten liegt, wobei der Kern die Zusammenhangskomponente des Basispunktes sei.

Für das Faserbündel aus Bemerkung 11.6 ergibt sich

$$\ldots \to \pi_1(P\operatorname{Homeo}^+(S)) \to \pi_1(S) \to \pi_0(P\operatorname{Homeo}^+(S, x)) \to \pi_0(P\operatorname{Homeo}^+(S)) \to \pi_0(S)$$

Nach einem Satz von Hamstrom ist $\pi_1(P\operatorname{Homeo}^+(S)) = \{1\}$. Des Weiteren wissen wir aus Aufgabe 2, Übungsblatt 6, dass $\pi_0(P\operatorname{Homeo}^+(S, x)) \cong P\operatorname{Mod}(S, x)$ und $\pi_0(P\operatorname{Homeo}^+(S)) \cong P\operatorname{Mod}(S)$. Außerdem ist S zusammenhängend und damit haben wir $\pi_0(S) = \{1\}$.
Somit ergibt die Sequenz oben:

$$\{1\} \to \pi_1(S) \to P\operatorname{Mod}(S, x) \to P\operatorname{Mod}(S) \to \{1\}$$

und das ist genau die Birman-Sequenz.

1 Die Graphen $\mathcal{C}(S)$, $\mathcal{N}(S)$ und $\widehat{\mathcal{N}}(S)$

Definition 1 Sei S eine Fläche. Dann sei folgendermaßen der Graph $\mathcal{C}(S)$ definiert:

- $V(\mathcal{C}(S)) := \{$einfach geschlossene Kurven, nicht nullhomotop, nicht homotop zu einer Punktierung oder Randkomponente$\}/\simeq$
- Kanten in $\mathcal{C}(S)$: a und b durch Kante verbunden $:\Leftrightarrow i(a, b) = 0$

Dabei bezeichnen wir mit a und b sowohl die Homotopieklassen von Kurven, als auch die entsprechenden Ecken in $\mathcal{C}(S)$. Für $a, b \in V(\mathcal{C}(S))$ bezeichnen wir mit $i(a, b)$ die geometrische Schnittzahl der entsprechenden Homotopieklassen von Kurven.

Bemerkung 1 Wenn in S eine Punktierung durch eine Randkomponente ersetzt wird (oder umgekehrt), ändert sich $\mathcal{C}(S)$ nicht.

Proposition 1 Für $3g+n \geq 5$ ist $\mathcal{C}(S_{g,n})$ zusammenhängend, d.h., dass für zwei beliebige Homotopieklassen a, b von einfach geschlossenen Kurven eine Kette $a = c_1, \ldots, c_k = b$ von Homotopieklassen von einfach geschlossenen Kurven existiert mit $i(c_i, c_{i+1}) = 0$.

Beweis Seien $a, b \in V(\mathcal{C}(S_{g,n})$: Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion über $i(a, b)$.
Für $i(a, b) = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei $i(a, b) = 1$ und seien α und β zwei Vertreter von a und b in minimaler Lage. Eine reguläre Umgebung von $\alpha \cup \beta$ ist ein Torus mit einer Randkomponente γ. Sei c die Homotopieklasse von γ. Da $3g + n \geq 5$, ist $c \in V(\mathcal{C}(S_{g,n}))$, denn γ kann weder homotop zu einer Punktierung sein, da sonst $S_{g,n} \simeq S_{1,1}$, noch kann γ nullhomotop sein, da sonst $S_{g,n} \simeq S_{1,0}$. Damit ergibt a, c, b einen Weg in $\mathcal{C}(S_{g,n})$.
Sei nun $i(a, b) \geq 2$ und es gelte die Behauptung für alle $a', b' \in V(\mathcal{C}(S_{g,n}))$ mit $i(a', b') < i(a, b)$. Für den Induktionsschritt brauchen wir nur ein $c \in V(\mathcal{C}(S_{g,n}))$ mit $i(a, c) < i(a, b)$ und $i(b, c) < i(a, b)$.

SKIZZE

Seien α und β Vertreter von a und b in minimaler Lage. Wir betrachten zwei bzgl. β aufeinander folgende Schnittpunkte und konstruieren wie in der Skizze die Kurve γ, falls sich α und β mit gleicher Orientierung in den beiden Punkten schneiden, bzw. die Kurven γ_1 und γ_2, falls sich α und β mit entgegengesetzter Orientierung schneiden. Dabei verlaufe γ (bzw. γ_1 und γ_2) außerhalb der Skizze parallel zu α und zwar immer auf der gleichen Seite und so, dass sich keine weiteren, unerwünschten Schnittpunkte mit β ergeben.
Im ersten Fall, wo die Schnittpunkte von α und β die gleiche Orientierung haben, kann γ nicht nullhomotop oder homotop zu einer Punktierung sein, da $|\alpha \cap \gamma| = 1$.
Im zweiten Fall, wo die Schnittpunkte von α und β nicht gleiche Orientierung haben, können γ_1 und γ_2 nicht nullhomotop sein, da sonst α und β ein Zweieck bilden würden, also nicht in minimaler Lage wären. Wenn γ_1 und γ_2 beide homotop zu einer Punktierung sind, berandet α eine zweifach punktierte Scheibe D, die γ_1 und γ_2 enthält.

SKIZZE

Sei β' ein Teilbogen von β, der von einem Punkt $x_1 \in \alpha$ zu einem Punkt $x_2 \in \alpha$ und ganz in $S_{g,n} \setminus D$ verläuft. Seien zudem α_1 und α_2 die zwei Teilstücke von α zwischen x_1 und x_2 und seien γ_3 ein Weg, der homotop zu $\beta' \cup \alpha_1$ ist und γ_4 ein Weg, der homotop zu $\beta' \cup \alpha_2$ ist, wobei $\gamma_3 \cap (\beta' \cup \alpha_1) = \gamma_4 \cap (\beta' \cup \alpha_2) = \emptyset$ gelte.
Wie vorhin können γ_3 und γ_4 nicht nullhomotop sein, sonst wäre β' homotop zu α_1, bzw. α_2, d.h. α und β wären nicht in minimaler Lage. Wären nun γ_3 und γ_4 beide homotop zu einer Punktierung, dann wäre $S_{g,n} \simeq S_{0,4}$ im Widerspruch zu $3g + n \geq 5$. Außerdem gilt $i(\gamma_3, \beta) \leq i(\alpha, \beta) - 2$ und $i(\gamma_4, \beta) \leq i(\alpha, \beta) - 2$ und $i(\gamma_3, \alpha) = i(\gamma_4, \alpha) = 0$.
Damit finden wir also in jedem Fall ein $c \in V(\mathcal{C}(S_{g,n}))$ mit $i(a, c) < i(a, b)$ und $i(b, c) < i(a, b)$. $\square$

Definition 2 Der Graph $\mathcal{N}(S)$ sei der Teilgraph von $\mathcal{C}(S)$, der von den Ecken aufgespannt wird, die von nichtseparierenden Kurven herkommen.

Lemma 1 Für $g \geq 2$ ist $\mathcal{N}(S_{g,n})$ zusammenhängend.

Beweis Sei zunächst $n \leq 1$:
Seien $a, b \in V(\mathcal{N}(S_{g,n}))$. Nach dem vorherigen Satz gibt es in $\mathcal{C}(S_{g,n})$ einen Weg von a nach b, der durch die Kette $a = c_1, \ldots, c_k = b$ mit $i(c_i, c_{i+1}) = 0$ gegeben ist. Wir müssen also zeigen, dass wir die c_i, die separierend sind, durch Wege über nicht-separierende Kurven ersetzen können.
Sei c_i also separierend und γ_i ein Vertreter von c_i. Seien S' und S'' die zwei Zusammenhangskomponenten von $S_{g,n} \setminus \gamma_i$. Wenn nun c_{i-1} und c_{i+1} in zwei verschiedenen Zusammenhangskomponenten liegen, dann gilt $i(c_{i-1}, c_{i+1}) = 0$ und wir können somit einfach c_i weglassen.
Wenn c_{i-1} und c_{i+1} beide in S' liegen, dann ersetzen wir c_i durch eine nichtseparierende, nicht nullhomotope und nicht zu einer Punktierung homotope Kurve in S''. Diese existiert, da S' und S'' beide mindestens Geschlecht 1 haben. Dies folgt daraus, dass $g \geq 2$ und $n \leq 1$: Hätte S' (oder S'') Geschlecht 0, wäre c_i entweder nullhomotop oder homotop zu einer Punktierung.
Wiederhole das Ganze, bis alle $c_i \in V(\mathcal{N}(S_{g,n}))$.
Sei nun $n \geq 2$: Das einzige Problem, dass jetzt auftauchen kann, ist, dass c_{i-1} und c_{i+1} beide in S' liegen

und S'' Geschlecht 0 hat (oder umgekehrt). In diesem Fall liegen mindestens 2 Punktierungen in S'' und das Geschlecht von S' ist gleich $g \geq 2$. Damit können wir per Induktion folgern, dass es einen Weg von c_{i-1} nach c_{i+1} in $\mathcal{N}(S')$ gibt, mit dem wir c_i ersetzen können. $\square$

Definition 3 Sei S eine Fläche. Der Graph $\widehat{\mathcal{N}}(S)$ sei folgendermaßen definiert:

- $V(\widehat{\mathcal{N}}(S)) := V(\mathcal{N}(S))$
- Kanten in $\widehat{\mathcal{N}}(S))$: a und b durch Kante verbunden $:\Leftrightarrow i(a,b) = 1$

Lemma 2 Für $g \geq 2$ ist $\widehat{\mathcal{N}}(S_{g,n})$ zusammenhängend.

Beweis Seien $a, b \in V(\widehat{\mathcal{N}}(S_{g,n}))$. Nach dem letzten Satz gibt es $a = c_1, \ldots, c_k = b$ mit $i(c_i, c_{i+1}) = 0$.

Beh.: Es gibt für jedes i ein d_i mit $i(c_i, d_i) = 1$ und $i(d_i, c_{i+1}) = 1$.
Damit ergibt die Kette $a = c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots c_{k-1}, d_{k-1}, c_k = b$ einen Weg von a nach b in $\widehat{\mathcal{N}}(S_{g,n})$.

Beweis der Behauptung:
Fall 1: $S_{g,n} \setminus (c_i \cup c_{i+1})$ ist nicht zusammenhängend: Dann seien S' und S'' die Zusammenhangskomponenten von $\overline{S_{g,n} \setminus (c_i \cup c_{i+1})}$ (d.h. die Fläche $S_{g,n}$ wird entlang der beiden Kurven c_i und c_{i+1} aufgeschnitten). Seien c_i' und c_{i+1}' die von c_i, bzw. von c_{i+1} herkommenden Randkomponenten von S' und seien c_i'' und c_{i+1}'' die entsprechenden Randkomponenten von S''. Dann gibt es einen Bogen $d_i' \subseteq S'$ von c_i' nach c_{i+1}' und einen Bogen $d_i'' \subseteq S''$ von c_i'' nach c_{i+1}''. Die Flächen S' und S'' können wieder so verklebt werden, dass die Fläche $S_{g,n}$ wieder entsteht. Die Bögen d_i' und d_i'' können so gewählt werden, dass die Punkte $d_i' \cap c_i'$, bzw. $d_i' \cap c_{i+1}'$ nach der Verklebung mit den Punkten $d_i'' \cap c_i''$, bzw. $d_i'' \cap c_{i+1}''$ übereinstimmen.
Die Kurve $d_i := d_i' \cup d_i'' \subseteq S_{g,n}$ erfüllt die Bedingungen für die Behauptung.
Fall 2: $S_{g,n} \setminus (c_i \cup c_{i+1})$ ist zusammenhängend. Dann ist die Fläche $S' := \overline{S_{g,n} \setminus (c_i \cup c_{i+1})}$ homöomorph zu einer eine Fläche vom Geschlecht ≥ 0 mit 4 Randkomponenten, nämlich c_i', c_i'', die von c_i herkommen und c_{i+1}', c_{i+1}'', die von c_{i+1} herkommen. Sei nun d_i' ein Bogen von c_i' nach c_{i+1}' und d_i'' ein Bogen von c_i'' nach c_{i+1}'', der d_i' nicht schneidet. Wie oben entsteht durch Verklebung wieder die ursprüngliche Fläche und wie oben haben wir, bei geeigneter Wahl von d_i' und d_i'', dass $d_i := d_i' \cup d_i''$ die Bedingungen für die Behauptung erfüllt. $\square$

2 $\mathrm{Mod}(S)$ wird von endlich vielen Dehn-Twists erzeugt

Lemma 3 Sei Γ ein zusammenhängender Graph und sei $G \leq \mathrm{Isom}(\Gamma)$ eine Gruppe, die auf den Ecken von Γ, sowie auf der Menge

$$\{(x,y) \mid x, y \in V(\Gamma), \exists e \in E(\Gamma) \text{ mit } i(e) = x, t(e) = y\}$$

transitiv operiert. Seien v und w zwei Ecken, die durch eine Kante verbunden sind, und sei $h \in G$ mit $h(w) = v$ gegeben.
Dann wird G von h und dem Stabilisator von v in G erzeugt.

Beweis Übungsblatt 8, A3. $\square$

Satz 1 Sei $S_{g,n}$ eine Fläche mit $g \geq 1$ und $n \geq 0$. Dann wird die Gruppe $P\,\mathrm{Mod}(S_{g,n})$ von endlich vielen Dehntwists an nichtseparierenden einfach geschlossenen Kurven in $S_{g,n}$ erzeugt.

Beweis Wir wenden zunächst vollständige Induktion über n an, dann vollständige Induktion über g.
Induktion über n: Für $S_{1,0}$ und $S_{1,1}$ gilt die Aussage (IN DIE ÜBUNG VERLEGT!).
sei nun $g \geq 1$ und $n \geq 0$, $(g,n) \neq (1,0)$ und es gelte die Aussage für $P\,\mathrm{Mod}(S_{g,n})$. Zu zeigen ist, dass $P\,\mathrm{Mod}(S_{g,n+1})$ von endlich vielen Dehntwists erzeugt wird. Wir benützen dazu die Birman-Sequenz:

$$1 \to \pi_1(S_{g,n}) \hookrightarrow P\,\mathrm{Mod}(S_{g,n+1}) \overset{Forget}{\twoheadrightarrow} P\,\mathrm{Mod}(S_{g,n}) \to 1$$

$\pi_1(S_{g,n})$ wird von den Homotopieklassen von endlich vielen einfach geschlossenen Wegen erzeugt. Nach Bem. 11.3 sind die Bilder dieser Erzeuger von $\pi_1(S_{g,n})$ das Produkt von zwei Dehn-Twists. Damit wird

$\mathrm{Bild}(\pi_1(S_{g,n}))$ von endlich vielen Dehn-Twists $T_{\alpha_1}, ..., T_{\alpha_k}$ erzeugt.
$P\operatorname{Mod}(S_{g,n})$ wird nach Voraussetzung von endlich vielen Dehn-Twists $T_{\beta_1}, ..., T_{\beta_m}$ erzeugt. Wenn wir nun für jedes T_{β_i} ein Lift $T'_{\beta_i} \in P\operatorname{Mod}(S_{g,n+1})$ dazunehmen, dann bilden $T_{\alpha_1}, ..., T_{\alpha_k}, T'_{\beta_1}, ..., T'_{\beta_m}$ ein Erzeugendensystem von $P\operatorname{Mod}(S_{g,n+1})$, denn da die Sequenz exakt ist, gilt $\mathrm{Bild}(\pi_1(S_{g,n})) = \mathrm{Kern}(Forget)$ und somit lässt sich jedes Element in $P\operatorname{Mod}(S_{g,n+1})$ schreiben als Lift eines Elementes in $P\operatorname{Mod}(S_{g,n})$ mal einem Element aus dem Kern. Die T'_{β_i} sind auch Dehn-Twists, da sie Lifts unter der Vergiss-Abbildung sind: Ein Dehn-Twist an einer Kurve β_i (die O.E. nicht durch die $n+1$-te Punktierung geht) ist, wenn mann die $n+1$-te Punktierung hinzunimmt, immer noch ein Dehn-Twist an β_i.
Induktion über g: Für $P\operatorname{Mod}(S_{1,n})$ folgt die Aussage bereits aus der Indutktion über n.
Sei nun $g \geq 2$ und es gelte die Aussage für $P\operatorname{Mod}(S_{g-1,n})$ für jedes $n \geq 0$. Nach dem vorletzten Lemma ist $\widehat{\mathcal{N}}(S_g)$ zusammenhängend. $\operatorname{Mod}(S_g)$ operiert transitiv auf den Ecken von $\widehat{\mathcal{N}}(S_g)$ und auf die Paare von Ecken mit $\{(x,y) : \exists e \in E(\widehat{\mathcal{N}}(S_g))$ mit $i(e) = x, t(e) = y\}$, denn nicht-separierende, einfach geschlossene Kurven können immer aufeinander abgebildet werden, ebenso Paare von solchen Kurven mit geometrischer Schnittzahl 1. Damit können wir das vorherige Lemma anwenden:
Sei $a \in V(\widehat{\mathcal{N}}(S_g))$ beliebig und $b \in V(\widehat{\mathcal{N}}(S_g))$ mit $i(a,b) = 1$. Sei $\operatorname{Mod}(S_g, a)$ der Stabilisator von a in $\operatorname{Mod}(S_g)$. Wir haben: $T_aT_bT_a(b) = a$. Denn: Aufgabe 1, Blatt 7 $\Rightarrow T_aT_bT_a(b) = T_bT_aT_b(b) = T_bT_a(b)$. Mit dem Beweis von Aufgabe 1, Blatt 7 folgt, dass das gerade a ist. Damit folgt aus dem vorherigen Lemma, dass $\operatorname{Mod}(S_g)$ von $\operatorname{Mod}(S_g, a)$ und T_a und T_b erzeugt wird. Es bleibt also zu zeigen, dass $\operatorname{Mod}(S_g, a)$ von endlich vielen Dehn-Twists erzeugt wird. Sei $\operatorname{Mod}(S_g, \vec{a})$ die Untergruppe von $\operatorname{Mod}(S_g, a)$, die die Orientierung von a fix lässt. Diese ist eine echte Untergruppe, da $T_bT_a^2T_b$ die Orientierung von a umkehrt. $\operatorname{Mod}(S_g, \vec{a})$ hat somit Index 2 in $\operatorname{Mod}(S_g, a)$ Damit haben wir die kurze exakte Sequenz

$$1 \to \operatorname{Mod}(S_g, \vec{a}) \hookrightarrow \operatorname{Mod}(S_g, a) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z} \to 1$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $\operatorname{Mod}(S_g, \vec{a})$ von endlich vielen Dehn-Twists erzeugt wird.
<u>Beh.</u>: Sei α ein Vertreter der Homotopieklasse a. Dann ist die folgende Sequenz exakt:

$$1 \to \langle T_a \rangle \to \operatorname{Mod}(S_g, \vec{a}) \to P\operatorname{Mod}(S_g \setminus \alpha) \to 1,$$

wobei α ein Vertreter von a sei.
Da $S_g \setminus \alpha \simeq S_{g-1,2}$, ist $P\operatorname{Mod}(S_g \setminus \alpha)$ nach Induktionsvoraussetzung von endlich vielen Dehn-Twists an nicht separierenden einfach geschlossenen Kurven erzeugt. Mit der Exaktheit der Sequenz aus der Behauptung ist damit auch $\operatorname{Mod}(S_g, \vec{a})$ von endlich vielen Dehn-Twists an nicht separierenden einfach geschlossenen Kurven erzeugt.
<u>Beweis der Beh.</u>: Wir Zeigen, dass die folgende Sequenz exakt ist:

$$1 \to \langle T_a \rangle \to \operatorname{Mod}(S_g, a) \overset{Del}{\to} \operatorname{Mod}(S_g \setminus \alpha) \to 1$$

Der Homomorphismus $\langle T_a \rangle \to \operatorname{Mod}(S_g, a)$ ist injektiv, da es sich um eine Inklusion handelt.
Der Homomorphismus Del ist wohldefiniert, da es für jedes Element aus $\operatorname{Mod}(S_g, a)$ einen Vertreter gibt, der α fix lässt, Für ein Element aus $\operatorname{Mod}(S_g, \vec{a})$ gibt es sogar einen Vertreter, der α punktweise fix lässt. Außerdem ist Del surjektiv, da jeder Homöomorphismus von $\operatorname{Mod}(S_g \setminus \alpha)$ zu einem Homöomorphismus isotop ist, der sich auf α stetig fortsetzen lässt.
Sei $f \in \mathrm{Kern}(Del)$ und sei ϕ ein Vetreter, der α punktweise fix lässt. Sei nun S_α die Fläche, die wir erhalten, wenn wir S entlang der Kurve α aufschneiden, also $S \setminus \alpha$ mit zwei Randkomponenten α_1 und α_2 und sei S_α^* die Fläche, die wir erhalten, wenn wir die Randkomponenten α_1 und α_2 von S_α jeweils mit einer punktierten Kreisscheibe zukleben. Dann gilt $S \setminus \alpha \subset S_\alpha^*$ und $S \setminus \alpha \simeq S_\alpha^*$. Außerdem können Isotopien von $S \setminus \alpha$ auf S_α^* fortgesetzt werden. Da $\phi \in \underline{\mathrm{Homeo}^+(S,a)}$ die Kurve α punktweise fixiert, kann ϕ zu einem Homöomorphismus $\overline{\phi}$ von S_α fortgesetzt werden, wobei $\overline{\phi}\mid_{\alpha_1 \cup \alpha_2} = \mathrm{id}$.
$\overline{\phi}$ kann auf S_α^* fortgesetzt werden und ist hier in der Homotopieklasse von $Del(f)$, und damit isotop zur Identität.
Damit ist $\overline{\phi}$ im Kern der Abbildung

$$Cap : \operatorname{Mod}(S_\alpha) \to \operatorname{Mod}^\star(S_\alpha^*) \simeq \operatorname{Mod}(S \setminus \alpha)$$

die von der Inklusion induziert wird. $\operatorname{Mod}^\star(S_\alpha^*)$ sei dabei die Untergruppe von $\operatorname{Mod}(S_\alpha^*)$, die den markierten Punkt, der von der punktierten Kreisscheibe herkommt, fix lässt.
Der Kern dieser Abbildung wir aber erzeugt von den Dehntwists entlang von Kurven, die zu den Randkurven α_1 und α_2 homotop sind, wie aus dem folgenden Lemma folgt. Da also $[\overline{\phi}] \in \langle T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2} \rangle$, folgt $f \in T_a$. $\square$

BIS HIER BIN ICH GEKOMMEN

Definition 4 Sei S° eine Fläche mit nichtleerem Rand und sei S^* die Fläche, die man erhält, indem man eine punktierte Kreisscheibe entlang einer Komponente β von ∂S°. Mit $\mathrm{Mod}^\star(S^*)$ bezeichnen wir die Untergruppe von $\mathrm{Mod}(S^*)$, die den markierten Punkt, der von der punktierten Kreisscheibe herkommt, fix lässt.
Die Inklusion $S^\circ \hookrightarrow S^*$ induziert einen Gruppenhomomorphismus

$$Cap : \mathrm{Mod}(S^\circ) \to \mathrm{Mod}^\star(S^*)$$

Lemma 4 Die folgende Sequenz ist exakt:

$$1 \to \langle T_\beta \rangle \to \mathrm{Mod}(S^\circ) \stackrel{Cap}{\to} \mathrm{Mod}^\star(S^*) \to 1$$

Beweis Als einen ersten Schritt zeigen wir
<u>Beh.</u>: $\mathrm{Mod}(S^\circ) \cong \mathrm{Mod}(\hat{S}, (p, v))$.
Dabei sei $\hat{S}$ die Fläche, die man erhält, wenn man S° entlang β mit einer nicht punktierten Kreisscheibe verschließt. Wir versehen $\hat{S}$ mit einer glatten Struktur und (p, v) sei ein Punkt im Einheitstangentialraum $UT(\hat{S})$, wobei $p \in \hat{S}$ und $v \in T_p(\hat{S})$. Mit $\mathrm{Diff}^+(\hat{S}, (p, v))$ bezeichnen wir die Gruppe der orientierungerhaltenden Diffeomorphismen von $\hat{S}$, die (p, v) fix lassen. Wir definieren $\mathrm{Mod}(\hat{S}, (p, v)) := \pi_0(\mathrm{Diff}^+(\hat{S}, (p, v)))$.

<u>Beweis der Beh.</u>: Sei D eine in $\hat{S}$ eingebettete abgeschlossene Kreisscheibe und $\mathrm{Diff}^+(\hat{S}, D)$ sei die Gruppe der orientierungerhaltenden Diffeomorphismen von $\hat{S}$, die D fix lassen. Es gibt ein Faserbündel $p : \mathrm{Diff}^+(\hat{S}, (p, v)) \to \mathrm{Einb}^+(\hat{S}, (p, v))$ mit Faser $\mathrm{Diff}^+(\hat{S}, D)$, wobei $\mathrm{Einb}^+(\hat{S}, (p, v))$ der Raum der glatten, orientierungserhaltenden Einbettungen von D nach $\hat{S}$ seien, die einen fest gewählten Punkt im Einheittangentialraum von D auf (p, v) abbilden. Wie in der Birman Sequenz erhalten wir die lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \pi_1(\mathrm{Einb}^+(\hat{S}, (p, v))) \to \pi_0(\mathrm{Diff}^+(\hat{S}, D))$$

$$\to \pi_0(\mathrm{Diff}^+(\hat{S}, (p, v))) \to \pi_0(\mathrm{Einb}^+(\hat{S}, (p, v)))$$

Da D kontrahierbar ist, ist auch $\mathrm{Einb}^+(\hat{S}, (p, v))$ kontrahierbar und damit gilt $\pi_0(\mathrm{Einb}^+(\hat{S}, (p, v))) = \{1\}$ und $\pi_1(\mathrm{Einb}^+(\hat{S}, (p, v))) = 1$. Somit ergibt die Sequenz oben

$$1 \to \pi_0(\mathrm{Diff}^+(\hat{S}, D)) \to \pi_0(\mathrm{Diff}^+(\hat{S}, (p, v))) \to 1$$

und damit gilt die Behauptung $\mathrm{Mod}(S^\circ) \cong \mathrm{Mod}(\hat{S}, (p, v))$.
Die Projektion $(p, v) \mapsto p$ induziert eine Abbildung $\mathrm{Mod}(\hat{S}, (p, v)) \to \mathrm{Mod}(\hat{S}, p)$, die das folgende Diagramm kommutieren lässt

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mod}(\hat{S}, (p, v)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Mod}(\hat{S}, p) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Mod}(S^\circ) \arrow[r, "Cap"] & \mathrm{Mod}^\star(S^*)
\end{tikzcd}$$

Damit haben wir Cap als Abbildung $\mathrm{Mod}(\hat{S}, (p, v)) \to \mathrm{Mod}(\hat{S}, p)$.

Wir haben ein Faserbündel: $p : \mathrm{Diff}^+(\hat{S}, p) \to UT_p(\hat{S}$ mit Faser $\mathrm{Diff}^+(\hat{S}, (p, v))$. Aus Kulturbeitrag 2 folgt damit, dass wir ein lange exakte Sequenz erhalten:

$$\ldots \to \pi_1(\mathrm{Diff}^+(\hat{S}, p)) \to \pi_1(UT_p(\hat{S})) \to \pi_0(\mathrm{Diff}^+(\hat{S}, (p, v))) \to \pi_0(\mathrm{Diff}^+(\hat{S}, p)) \to \pi_0(UT_p(\hat{S}))$$

und dies gibt uns genau die kurze exakte Sequenz, die wir haben wollen. $\square$