

Geometrie der Schemata – Übungsblatt 0

(ohne Abgabe)

Aufgabe 1

Sei X ein topologischer Raum, A eine abelsche Gruppe und $x \in X$.

Die „Wolkenkratzergarbe“ auf X ist definiert durch $\mathcal{W}(U) := \begin{cases} A & , x \in U \\ \{0\} & , x \notin U \end{cases}$ für $U \subseteq X$ offen, mit Restriktionsabbildungen

$$\rho_V^U = \begin{cases} \{0\} \ni 0 \mapsto 0 \in \{0\} & , x \notin V, x \notin U \\ A \ni a \mapsto 0 \in \{0\} & , x \notin V, x \in U \\ \text{id}_A & , x \in V, x \in U \end{cases}$$

für $V \subseteq U \subseteq X$ offen.

- Zeige, dass \mathcal{W} eine Garbe von abelschen Gruppen auf X ist.
- Berechne die Halme der Garbe.

Aufgabe 2

Sei X ein topologischer Raum und \mathcal{F} eine Prägarbe von abelschen Gruppen auf X . Ist $x \in X$ ein Punkt, so bezeichne \mathcal{F}_x den Halm von \mathcal{F} in x . Nun definiert man die Menge

$$\text{Spé}(\mathcal{F}) := \dot{\bigcup}_{x \in X} \mathcal{F}_x.$$

Definiere weiter eine Projektionsabbildung $\pi: \text{Spé}(\mathcal{F}) \rightarrow X$ durch $\mathcal{F}_x \ni s \mapsto x$.

Für jede offene Menge $U \subseteq X$ und für jedes $s \in \mathcal{F}(U)$ erhält man eine Abbildung $\bar{s}: U \rightarrow \text{Spé}(\mathcal{F})$ durch $x \mapsto s_x$, wobei s_x der Keim von s in x sei. Alle diese Abbildungen sind Schnitte von π über U , d. h. für jedes dieser \bar{s} gilt: $\pi \circ \bar{s} = \text{id}_U$. Nun macht man $\text{Spé}(\mathcal{F})$ zu einem topologischen Raum, indem man ihm die feinste Topologie gibt, so dass alle diese \bar{s} für alle s und alle U stetig werden. Versehen mit dieser Topologie heißt $\text{Spé}(\mathcal{F})$ der *Espace Etalé* zur Prägarbe \mathcal{F} .

Sei nun \mathcal{F}^+ die zu \mathcal{F} assoziierte Garbe. Zeige:

Für jede offene Menge $U \subseteq X$ ist $\mathcal{F}^+(U)$ die Menge aller **stetigen** Schnitte von π über U . Insbesondere ist \mathcal{F} genau dann eine Garbe, wenn für jedes offene $U \subseteq X$ die Menge aller stetigen Schnitte von π über U gerade $\mathcal{F}(U)$ ist.