Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

24. April 2012

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Geometrie der Schemata – zur Lösung des Übungsblattes 0

Aufgabe 1

Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von abelschen Gruppen auf X. Ist $x \in X$ ein Punkt, so bezeichne $\mathcal{F}_x$ den Halm von $\mathcal{F}$ in x. Nun definiert man die Menge

$$\mathrm{Sp\acute{e}}(\mathcal{F}) := \dot{\bigcup_{x \in X}} \mathcal{F}_x.$$

Definiere weiter eine Projektionsabbildung $\pi\colon \mathrm{Sp\acute{e}}(\mathcal{F}) \to X$ durch $\mathcal{F}_x \ni s \mapsto x$.
Für jede offene Menge $U \subseteq X$ und für jedes $s \in \mathcal{F}(U)$ erhält man eine Abbildung $\overline{s}\colon U \to \mathrm{Sp\acute{e}}(\mathcal{F})$ durch $x \mapsto s_x$, wobei s_x der Keim von s in x sei. Alle diese Abbildungen sind Schnitte von π über U, d. h. für jedes dieser $\overline{s}$ gilt: $\pi \circ \overline{s} = \mathrm{id}_U$. Nun macht man $\mathrm{Sp\acute{e}}(\mathcal{F})$ zu einem topologischen Raum, indem man ihm die feinste Topologie gibt, so dass alle diese $\overline{s}$ für alle s und alle U stetig werden. Versehen mit dieser Topologie heißt $\mathrm{Sp\acute{e}}(\mathcal{F})$ der *Espace Etalé* zur Prägarbe $\mathcal{F}$.

Sei nun $\mathcal{F}^+$ die zu $\mathcal{F}$ assoziierte Garbe. Zeige:
Für jede offene Menge $U \subseteq X$ ist $\mathcal{F}^+(U)$ die Menge aller **stetigen** Schnitte von π über U. Insbesondere ist $\mathcal{F}$ genau dann eine Garbe, wenn für jedes offene $U \subseteq X$ die Menge aller stetigen Schnitte von π über U gerade $\mathcal{F}(U)$ ist.

zur Lösung:

In der Übung wollte ich zeigen, dass für offenes $U' \subseteq X$ mit $x \in U'$ und $s' \in \mathcal{F}(U')$ die Menge $\tilde{U} := \{[U', s']_y \in \mathcal{F}_y \mid y \in U'\}$ offen ist bezüglich der oben definierten Topologie auf $\mathrm{Sp\acute{e}}(\mathcal{F})$.

Auf einmal scheint das Argument auf meinem Zettel wieder zu stimmen (war nur etwas knapp formuliert), deshalb schreibe ich es hier nochmal ausführlicher auf.

Zu zeigen ist ja, dass für jedes offene $U'' \subseteq X$ und jedes $s'' \in \mathcal{F}(U'')$ die Menge $\left(\overline{s''}\right)^{-1}\left(\tilde{U}\right)$ offen in X ist. Sei also $U'' \in \mathrm{Off}(X)$ und $s'' \in \mathcal{F}(U'')$.

Ist $\left(\overline{s''}\right)^{-1}\left(\tilde{U}\right) = \emptyset$, so ist nichts weiter zu zeigen, da $\emptyset$ ja offen ist. Ist andernfalls $y \in \left(\overline{s''}\right)^{-1}\left(\tilde{U}\right)$, so ist $\overline{s''}(y) \in \tilde{U}$ und wegen $\overline{s''}(y) \in \mathcal{F}_y$ folgt $[U'', s'']_y = [U', s']_y$ ($\tilde{U}$ enthält ja pro Halm höchstens ein Element). Folglich existiert ein offenes $U''' \subseteq U' \cap U''$ mit $y \in U'''$ und $s'|_{U'''} = s''|_{U'''}$. Somit ist $U''' \subseteq \left(\overline{s''}\right)^{-1}\left(\tilde{U}\right)$ eine offene Umgebung von y und $\left(\overline{s''}\right)^{-1}\left(\tilde{U}\right)$ offen.