Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. Frank Herrlich Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

24. April 2012

Geometrie der Schemata – Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Sei $X := \{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie versehen (d. h. jede Teilmenge ist offen). Bestimme alle Garben $\mathcal{F}$ von Mengen auf X.

b) Bestimme die Halme $\mathcal{F}_x$ der Garben $\mathcal{F}$ aus Teil a) in den Punkten $x = 0$ und $x = 1$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ die Prägarbe der konstanten Funktionen auf X. Genauer sei für $U \subseteq X$ offen $\mathcal{F}(U) := \{ f : U \to \mathbb{Z} \mid f \text{ ist konstant} \}$ und für $V \subseteq U \subseteq X$ offen $\rho^U_V : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V), f \mapsto f|_V$.

a) Zeige, dass $\mathcal{F}$ im allgemeinen keine Garbe ist.

b) Berechne die zu $\mathcal{F}$ assoziierte Garbe $\mathcal{F}^+$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{B}$ eine Basis[1] der Topologie von X. Weiter sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Wir definieren eine $\mathcal{B}$-Garbe auf X als kontravarianten Funktor $\mathcal{F}'$ von $(\mathcal{B}, \subseteq)$ nach $\mathcal{C}$, der die $\mathcal{B}$-Garbeneigenschaft erfüllt:

Sind $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U, U_i \in \mathcal{B}$ und $(s_i)_{i \in I}$ mit $s_i \in \mathcal{F}'(U_i)$ gegeben, so dass $\rho^{U_i}_V(s_i) = \rho^{U_j}_V(s_j)$ für alle $V \subseteq U_i \cap U_j$, $V \in \mathcal{B}$ gilt, dann existiert genau ein $s \in \mathcal{F}'(U)$ mit $\rho^U_{U_i}(s) = s_i$ für alle $i \in I$.

Sei zunächst $\mathcal{C}$ die Kategorie der Mengen.

a) Zeige, dass sich $\mathcal{F}'$ eindeutig zu einer Garbe $\mathcal{F}$ auf X fortsetzen lässt.
Hinweis: Inverser Limes

b) Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben auf X und für $U \in \mathcal{B}$ Abbildungen $\tilde{\varphi}(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ gegeben, die mit den Restriktionsabbildungen $\rho^U_{U'}$ kommutieren.
Zeige, dass es einen eindeutigen Garbenmorphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ gibt mit $\varphi(U) = \tilde{\varphi}(U)$ für alle $U \in \mathcal{B}$.

c) Mache dir klar, dass a) und b) auch in der Kategorie der (abelschen) Gruppen, der Ringe und der R-Moduln gelten.

Abgabe bis Mittwoch, den 2. Mai 2012, in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20. Am 1. Mai (Feiertag) entfällt die Übung. Das neue Übungsblatt findet ihr ab dem 2. Mai online.

[1] d. h. alle offenen $U \subseteq X$ lassen sich als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ schreiben