Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

26. Juni 2012

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Geometrie der Schemata – Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Sei X ein topologischer Raum, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge von X und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf U. Ist $j\colon U \hookrightarrow X$ die Inklusion, so ist die *durch Null fortgesetzte Garbe*, $j_!(\mathcal{F})$, definiert als die zur Prägarbe

$$V \mapsto \begin{cases} \mathcal{F}(V) & \text{für } V \subseteq U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

assoziierte Garbe auf X.

Sei nun X ein Schema und $U \neq X$ ein offenes, dichtes Unterschema von X.
Zeige, dass $j_!(\mathcal{O}_U)$ nicht quasikohärent ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien X und Y noethersche Schemata und $f\colon X \to Y$ ein endlicher Morphismus.

a) Zeige: Ist $\mathcal{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, so ist $f_*(\mathcal{F})$ eine kohärente $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe.
b) Finde ein Beispiel dafür, dass a) selbst für Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k falsch ist, wenn f nicht endlich ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Sei X ein noethersches Schema und $\mathcal{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf X. Zeige:

a) Die Garbe $\mathcal{F}$ ist genau dann lokal frei, wenn für jedes $x \in X$ der Halm $\mathcal{F}_x$ ein freier $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul ist.
b) Ist A ein lokaler Ring und sind M und N endlich erzeugte A-Moduln mit $M \otimes_A N \cong A$, dann gilt $M \cong A \cong N$.
   Hinweis: Lemma von Nakayama
c) Gibt es eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{G}$ auf X mit $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \cong \mathcal{O}_X$, so ist $\mathcal{F}$ lokal frei vom Rang 1, d.h. invertierbar.

Abgabe bis Dienstag, den 3. Juli 2012, zu Beginn der Übung oder bis 13 Uhr in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.