Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

3. Juli 2012

Prof. Dr. Frank Herrlich Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Geometrie der Schemata – Lösung zum Übungsblatt 10

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei X ein noethersches Schema und $\mathcal{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf X. Zeige:

a) Die Garbe $\mathcal{F}$ ist genau dann lokal frei, wenn für jedes $x \in X$ der Halm $\mathcal{F}_x$ ein freier $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul ist.

b) Ist A ein lokaler Ring und sind M und N endlich erzeugte A-Moduln mit $M \otimes_A N \cong A$, dann gilt $M \cong A \cong N$.

Hinweis: Lemma von Nakayama

c) Gibt es eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{G}$ auf X mit $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \cong \mathcal{O}_X$, so ist $\mathcal{F}$ lokal frei vom Rang 1, d.h. invertierbar.

Lösung

b) Hier habe ich in der Übung einen Fehler gemacht (das mit dem von den Relationen erzeugten Untermodul macht leider doch keinen Sinn), daher hier noch einmal mein Weg (Jonathans gilt noch), in richtig:

„$\Leftarrow$“: Sei $U = \operatorname{Spec} R$ eine offene affine Umgebung von $x \in X$. Die Garbe $\mathcal{F}$ ist kohärent, also existiert ein endlich erzeugter R-Modul M, so dass $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$. Weiter ist $\mathcal{F}_x = M_x$ ein freier $\mathcal{O}_{X,x} = R_x$-Modul. Wie in der Übung, wähle ich freie Erzeuger $[(U_1, s_1)], \ldots, [(U_n, s_n)]$ von $\mathcal{F}_x$ als R_x-Modul. Da wir ohne Einschränkung U durch $\bigcap_{i=1}^n U_i$ ersetzen können, gilt ohne Einschränkung $U = U_1 = \cdots = U_n$. Dann können wir die s_i zu einem Erzeugendensystem $\{s_1, \ldots, s_n, s_{n+1}, \ldots, s_{n+m}\}$ von M ergänzen. In $\mathcal{F}_x$ gilt $s_{n+j} = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} s_i$ mit $\alpha_{i,j} \in R_x$. Es gibt demnach eine offene affine Umgebung $V_j \subseteq U$ von x, auf der gilt $s_{n+j} = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} s_i$. Wieder schneiden wir diese (endlich vielen) V_j und finden im Schnitt eine offene, affine Umgebung V von x mit $\mathcal{F}|_V = \widetilde{N}$, wobei $N = \langle s_1|_V, \ldots, s_n|_V \rangle_{R-Mod}$. Dieser Modul ist frei, den jede Relation in N würde eine Relation in $\mathcal{F}_x$ ergeben (wähle V irreduzibel - wie in Aufgabe 1), im Widerspruch dazu, das $M_x = N_x$ frei in den s_i ist.