Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

10. Juli 2012

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Geometrie der Schemata – Lösung zum Übungsblatt 11

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Betrachte das integre Schema $X := \operatorname{Proj}(\,k[x,y,z]/(y^2z - x^3)\,)$.

a) Finde einen Primdivisor W auf X, für den ord_W keine diskrete Bewertung auf $k(X) = \operatorname{Quot} \mathcal{O}_{X,W}$ **mit Bewertungsring** $\mathcal{O}_{\mathbf{X},\mathbf{W}}$ ist.

b) Berechne den Hauptdivisor von $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{\bar{z}}$.

Lösung:

b) Das Schema X ist 2-dimensional. Primdivisoren haben Kodimension 1, sind hier also eindimensional und entsprechen damit den abgeschlossenen Punkten in der projektiven Varietät, die von dem Funktor t aus Proposition 3.8 auf X abgebildet wird. Für die Punkte $(0\!:\!0\!:\!1)$ und $(0\!:\!1\!:\!0)$, d.h. für die Primdivisoren $W = \{(x,y)\}$ und $\widehat{W} = \{(x,z)\}$, haben wir die Ordnung von $\frac{x+y}{z}$ in der Übung schon ausgerechnet.

Alle anderen Punkte auf X haben die Form $(a\!:\!b\!:\!1)$ mit $(a,b) \neq (0,0)$ und gehören zu Primdivisoren der Form $\widetilde{W} = \{(x-a, y-b)\}$. Wegen $b^2 = a^3$ folgt aus $a = 0$, $b = 0$ und umgekehrt, es gilt also $a \neq 0$ und $b \neq 0$. Eine affine Umgebung von $\widetilde{W}$ ist

$$D_+(z) = \operatorname{Spec}\left(k\left[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right] / \left(\left(\frac{y}{z}\right)^2 - \left(\frac{x}{z}\right)^3\right)\right) \cong \operatorname{Spec}\left(k[x,y]/(y^2 - x^3)\right) .$$

Daher gilt $\mathcal{O}_{X,\widetilde{W}} \cong (k[x,y]/(y^2-x^3))_{(x-a,y-b)}$ und $\kappa(\widetilde{W}) = \mathcal{O}_{X,\widetilde{W}}/m_{\widetilde{W}} \cong k$. Die rationale Funktion $\frac{x}{z} + \frac{y}{z}$ wird zu $x + y$.

Gilt $a + b \neq 0$, so ist $x - a + y - b \neq x + y$. Da $x + y$ Grad 1 hat und k nullteilerfrei ist, liegt $x + y$ nicht in $(x - a, y - b)$, ist also eine Einheit in $\mathcal{O}_{X,\widetilde{W}}$. Hier gilt demnach $\mathcal{O}_{X,\widetilde{W}}/(x + y) = 0$ und $\operatorname{ord}_{\widetilde{W}}(x + y) = 0$.

Gilt $a + b = 0$, so ist $x - a + y - b = x + y$ und $x + y$ ist keine Einheit. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{X,\widetilde{W}}/(x+y) &\cong (k[x,y]/(y^2 - x^3, x + y))_{(x-a,y-b)} \\
&\cong (k[x]/(x^2 - x^3))_{(x-a,-x-b)} \\
&\overset{a+b=0}{\cong} (k[x]/(x^2(1-x)))_{(x-a)}
\end{aligned}$$

Wegen $a \neq 0$ ist x^2 in obigem Ring auf jeden Fall eine Einheit. Ist zusätzlich $a \neq 1$, so ist auch $(1 - x)$ eine Einheit und wie oben gilt $\mathcal{O}_{X,\widetilde{W}}/(x + y) = 0$ und $\operatorname{ord}_{\widetilde{W}}(x + y) = 0$. Für $a = 1$ (also $b = -1$) ist

$$\mathcal{O}_{X,\widetilde{W}}/(x + y) \cong (k[x]/(1 - x))_{(0)} \cong k$$

also gilt $\mathrm{ord}_{\widetilde{W}}(x+y) = 1$.

Der Divisor zu $x + y$ hat somit die folgende Gestalt:

$$\mathrm{div}\left(\frac{x+y}{z}\right) = 2 \cdot \{(x,y)\} - 3 \cdot \{(x,z)\} + \{(x-1, y+1)\}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei X ein noethersches integres ~~separiertes~~ Schema. Sei weiter V eine echte abgeschlossene Teilmenge von X und $U := X \setminus V$. Zeige:

a) Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Cl}(X) & \to & \mathrm{Cl}(U) \\ \sum n_i Y_i & \mapsto & \sum n_i (Y_i \cap U) \end{array}$$

ist ein surjektiver Homomorphismus. Dabei gehe die Summe auf der rechten Seite nur über die nichtleeren Schnitte $Y_i \cap U$.

b) Ist $\mathrm{codim}_X V \geq 2$, so ist die Abbildung in a) ein Isomorphismus.

c) Ist V irreduzibel und $\mathrm{codim}_X V = 1$, so ist die Sequenz

$$\mathbb{Z} \to \mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Cl}(U) \to 0$$

exakt. Dabei sei die erste Abbildung definiert durch $k \mapsto k \cdot V$.

Lösung:

a) Sei Y ein Primdivisor auf X, d.h. ein integres abgeschlossenes Unterschema der Kodimension 1. Ohne Einschränkung betrachten wir nur die Y mit $Y \cap U \neq \emptyset$.

Das Unterschema $Y \cap U$ ist abgeschlossen in U. Da X irreduzibel ist, liegt U dicht in X und die Dimensionen von Y und $U \cap Y$ sind gleich. Die Reduziertheit von Y überträgt sich direkt auf alle Unterschemata, also insbesondere auf $Y \cap U$. Eine Zerlegung von $Y \cap U$ in echte abgeschlossene Teilmengen induziert eine Zerlegung von Y, also folgt aus der Irreduzibilität von Y die von $Y \cap U$. Insgesamt haben wir gezeigt, dass $Y \cap U$ ein Primdivisor auf U ist.

Nun betrachten wir ein $f \in k(X) = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{X,Y})$. Dann ist $f|_U$ ein Element im Funktionenkörper $k(U) = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{U,Y\cap U})$ und da die Ordnung eine lokale Eigenschaft ist und $U \cap Y \neq \emptyset$ gilt, ist $\mathrm{ord}_Y f = \mathrm{ord}_{Y\cap U} f|_U$. Hauptdivisoren werden also auf Hauptdivisoren abgebildet und damit ist die angegebene Abbildung wohldefiniert.

Es bleibt noch die Surjektivität zu zeigen: Sei $Y \subseteq U$ ein Primdivisor. Es gilt $\overline{Y} \cap U = Y$, weil Y abgeschlossen in U ist. Da U dicht in X ist gilt $\mathrm{codim}_X(\overline{Y}) = \mathrm{codim}_U(Y) = 1$. Wir haben also einen Primdivisor auf X gefunden, der auf Y abgebildet wird.

b) Ist die Kodimension von V mindestens 2, so kann V keine Teilmenge von Kodimension 1 enthalten. Daher gilt für alle Primdivisoren Y in X, $Y \cap U \neq \emptyset$ und die oben definierte Abbildung ist injektiv.

c) Nach a) wissen wir bereits, dass $\varphi\colon \mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Cl}(U)$ surjektiv ist. Es bleibt also zu zeigen, dass $\mathrm{Kern}(\varphi) = \mathrm{Bild}(i)$ mit $i\colon\ \mathbb{Z} \to \mathrm{Cl}(X), k \mapsto k \cdot V$.

Wegen $U \cap V = \emptyset$ ist $\varphi(V) = 0$ und somit $\mathrm{Kern}(\varphi) \supseteq \mathrm{Bild}(i)$. Ist umgekehrt W ein Primdivisor aus $\mathrm{Kern}(\varphi)$, so gilt $U \cap W = \emptyset$, also $W \subseteq V$. Da V und W beide irreduzibel sind und dieselbe Dimension haben, folgt $V = W$, was $\mathrm{Kern}(\varphi) \subseteq \mathrm{Bild}(i)$ beweist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $R := k[x, y, z]/(xy - z^2)$ und $X := \mathrm{Spec}(R)$. Zeige:

a) X ist ein noethersches integres separiertes Schema, das nicht lokal faktoriell ist.

b) $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Hinweis: Benutze Aufgabe 2 c) mit $V :=$ x-Achse. Zeige: $2 \cdot V = \mathrm{div}(y)$, wobei y als rationale Funktion auf X aufgefasst wird. Benutze Proposition 11.3 und zeige, dass V kein Hauptdivisor ist.

c) $\mathrm{CaCl}(X) = 0$.
Hinweis: Cartier-Divisoren sind die Weil-Divisoren, die lokal Hauptdivisoren sind.

Lösung:

Teil a) und den Anfang von b) haben wir schon in der Übung gelöst.

b) Wir wissen, dass $\mathrm{Cl}(X)$ von V erzeugt wird und dass $2 \cdot V$ ein Hauptdivisor ist. Zu zeigen bleibt, dass V kein Hauptdivisor ist, was wir in zwei Schritten beweisen:

Behauptung 1: $q := (y, z)$ ist kein Hauptideal (Erinnerung: $V = V(q)$).

Wäre q ein Hauptideal, so gäbe es ein f mit $f|y$ und $f|z$. Die einzige Relation in R verändert den Grad eines Polynoms nicht und kann nicht auf Elemente von Grad 1 angewendet werde, also müsste f sogleich x und y sein, was nicht möglich ist.

Behauptung 2: Wäre $V = \mathrm{div}(f)$ für ein $f \in k(X)$, so wäre q ein Hauptideal.

Siehe Beweis von Proposition 6.2 im Hartshorne.

c) Aus dem Beweis von Satz 3 b) sehen wir, dass der Hinweis stimmt und Cartier-Divisoren genau die Weil-Divisoren sind, die lokal Hauptdivisoren sind. V ist kein Hauptdivisor, auch nicht lokal (er hat nur an einer Stelle einen Wert $\neq 0$, so dass „lokal“ hier keine Abschwächung ist). Es gibt folglich keinen Cartier-Divisor zu V. Dagegen ist $2 \cdot V$ ein Hauptdivisor, also erst recht lokal ein Hauptdivisor und somit in $\mathrm{CaCl}(X)$ gleich 0. Das zeigt die Behauptung.