Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

10. Juli 2012

Prof. Dr. Frank Herrlich Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Geometrie der Schemata – Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (5 Punkte)
In einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ seien zwei Objekte A und B mit injektiven Auflösungen $0 \to A \to I^\bullet$ und $0 \to B \to J^\bullet$ gegeben sowie ein Morphismus $f\colon A \to B$. Zeige:

a) Der Morphismus f kann zu einem Morphismus der Kettenkomplexe fortgesetzt werden, d.h. es gibt Morphismen $\alpha^k\colon I^k \to J^k$ für $k \geq 0$, die das folgende Diagramm kommutativ machen:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & I^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\alpha^0"'] & I^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "\alpha^1"'] & I^2 \arrow[r, "d^2"] \arrow[d, "\alpha^2"'] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\psi"'] & J^0 \arrow[r, "e^0"'] & J^1 \arrow[r, "e^1"'] & J^2 \arrow[r, "e^2"'] & \cdots \end{tikzcd}$$

b) Ist $(\beta^k)_{k\geq 0}$ eine weitere Fortsetzung von f auf die Kettenkomplexe, so sind $(\alpha^k)_{k\geq 0}$ und $(\beta^k)_{k\geq 0}$ „(ketten)homotop", d.h. es gibt für $k \geq 0$ diagonale Morphismen $h^k\colon I^k \to J^{k-1}$ mit $\alpha^k - \beta^k = h^{k+1} \circ d^k + e^{k-1} \circ h^k$ (dabei ist $J^{-1} = B$).

c) Nun sei X ein Schema und $\mathcal{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen auf X. Zeige, dass die Garbenkohomologie $H^i(X, \mathcal{F})$ nicht von der gewählten injektiven Auflösung von $\mathcal{F}$ abhängt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei k ein Körper, $X := \mathrm{Spec}(k[x,y]) = \mathbb{A}^2_k$ und $U := X \setminus \{(0,0)\}$. Betrachte eine offene affine Überdeckung von U und berechne die Čech-Kohomologie der Strukturgarbe auf U bezüglich dieser Überdeckung. Gib eine schöne Basis für den (unendlichdimensionalen) Vektorraum an, der dir dabei über den Weg läuft.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Berechne die Čech-Kohomologie der konstanten Garbe $\mathbb{Z}$ auf der Sphäre S^2 für die folgenden zwei Überdeckungen von S^2:

a) durch zwei echte, offene, zusammenhängende Teilmengen.

b) durch drei echte, offene, zusammenhängende Teilmengen, so dass der Schnitt von je zweien homöomorph zu einer offenen Kreisscheibe und der Schnitt von allen dreien homöomorph zu zwei offenen Kreisscheiben ist. Natürlich sollte man sich dafür zunächst per Skizze davon überzeugen, dass eine solche Überdeckung existiert.

Bitte wenden!

Aufgabe zum Nachdenken 4 (keine Abgabe)

In der Vorlesung haben wir die Čech-Kohomologie der konstanten Garbe $\mathbb{Z}$ auf S^1 zu einer Überdeckung berechnet, die aus zwei einfach zusammenhängenden Teilmengen U und V besteht.

Mache dir an geeigneten Beispielen klar, dass die Kohomologie sich nicht mehr ändert, wenn man die Überdeckung noch weiter verfeinert, d.h. durch $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ersetzt mit $U_i \subseteq U$ oder $U_i \subseteq V$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Abgabe bis Dienstag, den 17. Juli 2012, zu Beginn der Übung oder bis 13 Uhr in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.