Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

17 Juli 2012

Prof. Dr. Frank Herrlich Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Geometrie der Schemata – Lösung zum Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (5 Punkte)

In einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ seien zwei Objekte A und B mit injektiven Auflösungen $0 \to A \to I^\bullet$ und $0 \to B \to J^\bullet$ gegeben sowie ein Morphismus $f\colon A \to B$. Zeige:

a) Der Morphismus f kann zu einem Morphismus der Kettenkomplexe fortgesetzt werden, d.h. es gibt Morphismen $\alpha^k\colon I^k \to J^k$ für $k \geq 0$, die das folgende Diagramm kommutativ machen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & I^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\alpha^0"'] & I^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "\alpha^1"'] & I^2 \arrow[r, "d^2"] \arrow[d, "\alpha^2"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\psi"'] & J^0 \arrow[r, "e^0"'] & J^1 \arrow[r, "e^1"'] & J^2 \arrow[r, "e^2"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

b) Ist $(\beta^k)_{k\geq 0}$ eine weitere Fortsetzung von f auf die Kettenkomplexe, so sind $(\alpha^k)_{k\geq 0}$ und $(\beta^k)_{k\geq 0}$ „(ketten)homotop", d.h. es gibt für $k \geq 0$ diagonale Morphismen $h^k\colon I^k \to J^{k-1}$ mit $\alpha^k - \beta^k = h^{k+1} \circ d^k + e^{k-1} \circ h^k$ (dabei ist $J^{-1} = B$).

c) Nun sei X ein Schema und $\mathcal{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen auf X. Zeige, dass die Garbenkohomologie $H^i(X, \mathcal{F})$ nicht von der gewählten injektiven Auflösung von $\mathcal{F}$ abhängt.

Lösung:

b) Seien $(\alpha^k)_{k\geq 0}$ und $(\beta^k)_{k\geq 0}$ Fortsetzungen von f auf die Kettenkomplexe. Wir konstruieren diagonale Morphismen $h^k\colon I^k \to J^{k-1}$ mit $\alpha^k - \beta^k = h^{k+1} \circ d^k + e^{k-1} \circ h^k$, wobei $J^{-1} = B$, $I^{-1} = A$ und $J^{-2} = 0$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f-f"'] \arrow[dll, "h^{-1}"'] & I^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\alpha^0-\beta^0"] \arrow[dl, "h^0"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\psi"'] & J^0 \arrow[r, "e^0"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Setzen wir $h^{-1}\colon A \to 0$ und $h^0\colon I^0 \to B$ konstant 0, so gilt $f - f = h^0 \circ \varphi + 0 \circ h^{-1}$.

Seien nun $h^{-1}, \ldots, h^n$ mit der gewünschten Eigenschaft gegeben.

Für $x \in \mathrm{Kern}(d^n) = \mathrm{Bild}(d^{n-1})$ gilt: Es gibt ein $y \in I^{n-1}$ mit $d^{n-1}(y) = x$, also gilt

$$\begin{aligned}
(\alpha^n - \beta^n - e^{n-1}h^n)(x) &= (\alpha^n - \beta^n - e^{n-1} \circ h^n)(d^{n-1}(y)) \\
&= (\alpha^n \circ d^{n-1} - \beta^n \circ d^{n-1} - e^{n-1} \circ h^n \circ d^{n-1})(y) \\
&= (e^{n-1} \circ \alpha^{n-1} - e^{n-1} \circ \beta^{n-1} - e^{n-1} \circ h^n \circ d^{n-1})(y) \\
&= (e^{n-1} \circ (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} - h^n \circ d^{n-1}))(y) \\
&= (e^{n-1} \circ e^{n-2} \circ h^{n-1})(y) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
 & I^n \arrow[rr, "d^n"] \arrow[dl, bend right=60, "h^n"'] \arrow[dd, "\alpha^n - \beta^n - e^{n-1}h^n"'] \arrow[dr] & & I^{n+1} \arrow[ddll, dashed, bend left, "h^{n+1}"] \\
 & & I^n / \operatorname{Kern}(d^n) \arrow[ur, hook] \arrow[dl, dashed, "\tilde{h}^{n+1}"] & \\
J^{n-1} \arrow[r, "e^{n-1}"'] & J^n & &
\end{tikzcd}$$

Also faktorisiert $\alpha^n - \beta^n - e^{n-1}h^n$ über $I^n / \operatorname{Kern}(d^n)$ und induziert einen Morphismus $\tilde{h}^{n+1} \colon I^n / \operatorname{Kern}(d^n) \to J^n$. Da J^n injektiv ist und $I^n / \operatorname{Kern}(d^n) \hookrightarrow I^{n+1}$ ein Monomorphismus, gibt es eine Fortsetzung $h^{n+1} \colon I^{n+1} \to J^n$ von $\tilde{h}^{n+1}$. Nach Konstruktion gilt $h^{n+1} \circ d^n = \alpha^n - \beta^n - e^{n-1} \circ h^n$.

c) Mit Hilfe von a) und b) zeigen wir nun, dass die Garbenkohomologie nicht von der gewählten injektiven Auflösung abhängt.

Seinen $0 \to \mathcal{F} \to I^\bullet$ und $0 \to \mathcal{F} \to J^\bullet$ zwei injektive Auflösungen der Garbe $\mathcal{F}$ auf dem Schema X. Nach a) lässt sich $\mathrm{id} \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ zu $(\alpha^k)_{k \geq 0} \colon I^\bullet \to J^\bullet$ und zu $(\beta^k)_{k \geq 0} \colon J^\bullet \to I^\bullet$ fortsetzen.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & I^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\alpha^0"'] & I^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "\alpha^1"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\psi"'] & J^0 \arrow[r, "e^0"'] & J^1 \arrow[r, "e^1"'] & \cdots
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f"'] & J^0 \arrow[r, "e^0"] \arrow[d, "\beta^0"'] & J^1 \arrow[r, "e^1"] \arrow[d, "\beta^1"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"'] & I^0 \arrow[r, "d^0"'] & I^1 \arrow[r, "d^1"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Dann sind $(\mathrm{id})_{k \geq 0}$ und $(\beta^k \circ \alpha^k)_{k \geq 0}$ beides Fortsetzungen von $\mathrm{id} \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ nach $I^\bullet \to I^\bullet$. Nach b) gibt es also Morphismen $h^k \colon I^k \to I^{k-1}$ so dass $\beta^k \circ \alpha^k - \mathrm{id} = h^{k+1} \circ d^k + d^{k-1} \circ h^k$. Wir entfernen die erste Spalte, wenden den globalen Schnittfunktor an und erhalten das folgende Diagramm von abelschen Gruppen (die zum Garbenmorphismus g gehörige Abbildung auf ganz X, $g(X)$, nennen wir $\tilde{g}$):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma(X, I^0) \arrow[r, "\tilde{d}^0"] \arrow[d, "\tilde{\beta}^0 \circ \tilde{\alpha}^0 - \mathrm{id}"'] & \Gamma(X, I^1) \arrow[r, "\tilde{d}^1"] \arrow[d, "\tilde{\beta}^1 \circ \tilde{\alpha}^1 - \mathrm{id}"'] \arrow[dl, bend right, "\tilde{h}^0"'] & \Gamma(X, I^2) \arrow[r, "\tilde{d}^2"] \arrow[d, "\tilde{\beta}^2 \circ \tilde{\alpha}^2 - \mathrm{id}"'] \arrow[dl, bend right, "\tilde{h}^1"'] & \cdots \arrow[dl, "\tilde{h}^2"'] \\
0 \arrow[r] & \Gamma(X, I^0) \arrow[r, "\tilde{d}^0"'] & \Gamma(X, I^1) \arrow[r, "\tilde{d}^1"'] & \Gamma(X, I^2) \arrow[r, "\tilde{d}^2"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Für $k \geq 0$ gilt: Wegen $\alpha^k \circ d^{k-1} = d^{k-1} \circ \alpha^{k-1}$ und $\beta^k \circ d^{k-1} = d^{k-1} \circ \beta^{k-1}$, ist $\tilde{\beta}^k \circ \tilde{\alpha}^k - \mathrm{id}$ auf $H^k(\Gamma(X, I^\bullet))$ wohldefiniert. Sei $\overline{x} = x + \operatorname{Bild}(\tilde{d}^{k-1}) \in H^k(\Gamma(X, I^\bullet))$, d.h. $x \in \operatorname{Kern}(\tilde{d}^k)$. Dann gilt:

$$(\tilde{\beta}^k \circ \tilde{\alpha}^k - \mathrm{id})(\overline{x}) = \overline{(\tilde{\beta}^k \circ \tilde{\alpha}^k - \mathrm{id})(x)} = \overline{\tilde{h}^{k+1} \circ \underbrace{\tilde{d}^k(x)}_{=0} + \underbrace{\tilde{d}^{k-1} \circ \tilde{h}^k(x)}_{\in \operatorname{Bild}(\tilde{d}^{k-1})}} = 0$$

Es folgt $\tilde{\beta}^k \circ \tilde{\alpha}^k = \mathrm{id}$. Ganz analog erhält man $\tilde{\alpha}^k \circ \tilde{\beta}^k = \mathrm{id}$ und somit $H^k(\Gamma(X, I^\bullet)) = H^k(\Gamma(X, J^\bullet))$.