Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. Frank Herrlich Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

24. April 2012

Geometrie der Schemata – Lösung zum Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Sei $X := \{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie versehen (d. h. jede Teilmenge ist offen). Bestimme alle Garben $\mathcal{F}$ von Mengen auf X.

b) Bestimme die Halme $\mathcal{F}_x$ der Garben $\mathcal{F}$ aus Teil a) in den Punkten $x = 0$ und $x = 1$.

Lösung:

a) Die offenen Mengen von X sind $\mathrm{Off}(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Eine Garbe von Mengen auf X ordnet jedem Element aus $\mathrm{Off}(X)$ eine Menge zu, also

$$\emptyset \to M_\emptyset, \quad \{0\} \to M_0, \quad \{1\} \to M_1, \quad X \to M_X.$$

Zusätzlich brauchen wir noch Restriktionsabbildungen

$$M_0 \to M_\emptyset, \quad M_1 \to M_\emptyset, \quad M_X \to M_\emptyset, \quad M_X \to M_0, \quad M_X \to M_1,$$

so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} M_X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & M_0 \arrow[d] \\ M_1 \arrow[r] & M_\emptyset \end{tikzcd}$$

In der Vorlesung wurde bewiesen, dass $M_\emptyset$ einelementig sein muss. Dann kommutiert das obige Diagramm automatisch.

Da die offenen Mengen $\{0\}$ und $\{1\}$ die offene Menge $\{0, 1\}$ überdecken, besagt die Garbeneigenschaft, dass es zu jedem $a \in M_0$ und jedem $b \in M_1$ ein eindeutig bestimmtes $c \in M_X$ geben muss mit $\rho^X_{\{0\}}(c) = a$ und $\rho^X_{\{1\}}(c) = b$. Das bedeutet, dass $M_X \cong M_0 \times M_1$ ist. Damit haben wir alle Garben von Mengen auf X charakterisiert.

b) Der Halm der Garbe $\mathcal{F}$ in x ist definiert als

$$\mathcal{F}_x := \{\, (U, f) \mid U \in \mathrm{Off}(X), x \in U, s \in \mathcal{F}(U) \,\}/ \sim,$$

wobei zwei Paare (U, s) und (U', s') äquivalent sein sollen, wenn es ein $U'' \subseteq U \cap U'$ gibt mit $\rho^U_{U''}(s) = \rho^{U'}_{U''}(s')$.

Zwei Punkte $(X, (a, b))$ und $(X, (a', b'))$ beschreiben genau dann den gleichen Punkt in $\mathcal{F}_0$, wenn $a = \rho^X_{\{0\}}((a, b)) = \rho^X_{\{0\}}((a', b')) = a'$. Also ist $\mathcal{F}_0 \cong M_0$. Ebenso ist $\mathcal{F}_1 \cong M_1$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ die Prägarbe der konstanten Funktionen auf X. Genauer sei für $U \subseteq X$ offen $\mathcal{F}(U) := \{ f\colon U \to \mathbb{Z} \mid f \text{ ist konstant} \}$ und für $V \subseteq U \subseteq X$ offen $\rho_V^U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V), f \mapsto f|_V$.

a) Zeige, dass $\mathcal{F}$ im allgemeinen keine Garbe ist.

b) Berechne die zu $\mathcal{F}$ assoziierte Garbe $\mathcal{F}^+$.

Lösung:

a) Falls es in X offene Mengen U und U' gibt mit $U \cap U' = \emptyset$, dann ist $\mathcal{F}$ keine Garbe:

Seien $f_1 \in \mathcal{F}(U)$ mit $f_1 \equiv 1$ und $f_2 \in \mathcal{F}(U')$ mit $f_2 \equiv 2$. Da $U \cap U' = \emptyset$, ist $f_1|_{U\cap U'} = f_2|_{U\cap U'}$ und $(f_i)_{i\in\{1,2\}}$ ist eine konsistente Familie für die offene Überdeckung $U \cup U'$. Da aber für $f \in \mathcal{F}(U \cup U')$ nicht gleichzeitig $f|_U \equiv 1$ und $f|_{U'} \equiv 2$ gelten kann, gibt es zu der konsistenten Familie kein Amalgam.

b) Zunächst berechnen wir die Halme von $\mathcal{F}$:

$$[(U,f)]_x = [(U',f')]_x \Leftrightarrow \exists U'' \subseteq U \cap U' \text{ mit } x \in U'' : f|_{U''} = f'|_{U''} \Leftrightarrow f(x) = f'(x)$$

Die Halme sind also über $[(U,f)]_x \mapsto f(x)$ alle isomorph zu $\mathbb{Z}$.

Es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^+(U) := \{ s\colon U \to \dot{\bigcup_{x\in U}} \mathcal{F}_x \mid\ & \forall x \in U : s(x) \in \mathcal{F}_x \text{ und } \exists \text{ offene Umgebung } U_x \text{ von } x, \\ & \exists f \in \mathcal{F}(U_x)\, \forall y \in U_x : s(y) = [(U_x, f)]_y =: f_y \}\,.\end{aligned}$$

Benutzen wir die Isomorphismen $\mathcal{F}_x \ni [(U,f)]_x \mapsto f(x) \in \mathbb{Z}$ der Halme mit $\mathbb{Z}$, sowie die Tatsache, dass $f \in \mathcal{F}(U_x)$ konstant ist, so besagt die letzte Bedingung an s:

$$\forall x \in U\ \exists \text{ offene Umgebung } U_x \text{ von } x : \forall y \in U_x : s(y) = s(x)\,.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^+(U) &= \{\ s\colon U \to \mathbb{Z} \mid \forall x \in U\, \exists U_x \in \mathrm{Off}(X), x \in U_x : s|_{U_x} \text{ ist konstant} \} \\ &= \{\ s\colon U \to \mathbb{Z} \mid s \text{ ist lokal konstant} \}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{B}$ eine Basis[1] der Topologie von X. Weiter sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Wir definieren eine $\mathcal{B}$-Garbe auf X als kontravarianten Funktor $\mathcal{F}'$ von $(\mathcal{B}, \subseteq)$ nach $\mathcal{C}$, der die $\mathcal{B}$-Garbeneigenschaft erfüllt:

Sind $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ mit $U, U_i \in \mathcal{B}$ und $(s_i)_{i\in I}$ mit $s_i \in \mathcal{F}'(U_i)$ gegeben, so dass $\rho_V^{U_i}(s_i) = \rho_V^{U_j}(s_j)$ für alle $V \subseteq U_i \cap U_j$, $V \in \mathcal{B}$ gilt, dann existiert genau ein $s \in \mathcal{F}'(U)$ mit $\rho_{U_i}^U(s) = s_i$ für alle $i \in I$.

Sei zunächst $\mathcal{C}$ die Kategorie der Mengen.

a) Zeige, dass sich $\mathcal{F}'$ eindeutig zu einer Garbe $\mathcal{F}$ auf X fortsetzen lässt.
Hinweis: Inverser Limes

b) Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben auf X und für $U \in \mathcal{B}$ Abbildungen $\tilde{\varphi}(U) \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ gegeben, die mit den Restriktionsabbildungen $\rho_{U'}^U$ kommutieren.
Zeige, dass es einen eindeutigen Garbenmorphismus $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ gibt mit $\varphi(U) = \tilde{\varphi}(U)$ für alle $U \in \mathcal{B}$.

c) Mache dir klar, dass a) und b) auch in der Kategorie der (abelschen) Gruppen, der Ringe und der R-Moduln gelten.

Lösung:

a) Wir nutzen den Hinweis und definieren $\mathcal{F}$ mit Hilfe des inversen Limes. Für $U \in \mathrm{Off}(X)$ setzen wir

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(U) &:= \varprojlim_{V\subseteq U, V\in\mathcal{B}} \mathcal{F}'(V)\\ &= \{ (s_V)_{V\subseteq U, V\in\mathcal{B}} \in \textstyle\prod_{V\subseteq U, V\in\mathcal{B}} \mathcal{F}'(V) \mid \forall W \subseteq V \subseteq U, V, W \in \mathcal{B} : \rho_W^V(s_V) = s_W \}\end{aligned}$$

und für $U' \subseteq U \subseteq X$ offen sei

$$\rho_{U'}^U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U'), (s_V)_{V\subseteq U, V\in\mathcal{B}} \mapsto (s_V)_{V\subseteq U', V\in\mathcal{B}} .$$

Die Abbildung $\rho_{U'}^U$ bildet die Familie $(s_V)_{V\subseteq U, V\in\mathcal{B}}$ auf die Teilfamilie über den $V \subseteq U'$ ab, also gilt $\rho_U^U = \mathrm{id}_U$ und $\rho_{U''}^{U'} \circ \rho_{U'}^U = \rho_{U''}^U$ und wir haben eine Prägarbe von Mengen definiert.

Die Prägarbe $\mathcal{F}$ stimmt auf den Mengen $V \in \mathcal{B}$ mit $\mathcal{F}'$ überein:

Die Abbildung

$$\psi(V) \colon \mathcal{F}'(V) \to \mathcal{F}(V), s \mapsto (s|_{V'})_{V'\subseteq V, V'\in\mathcal{B}}$$

ist wohldefiniert, da eine $\mathcal{B}$-Garbe insbesondere ein kontravarianter Funktor von $(\mathcal{B}, \subseteq)$ nach $\mathcal{C}$ ist. Außerdem liefert uns die $\mathcal{B}$-Garbeneigenschaft eine wohldefinierte Umkehrabbildung

$$\psi^{-1}(V) \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}'(V), (s_{V'})_{V'\subseteq V, V'\in\mathcal{B}} \mapsto s_V .$$

Sowohl ψ als auch ψ^{-1} kommutieren mit den Restriktionsabbildungen.

Weiter ist $\mathcal{F}$ sogar eine Garbe von Mengen auf X:

Sei $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine offene Überdeckung, $s_i = (s_{i,V})_{V\subseteq U_i, V\in\mathcal{B}} \in \mathcal{F}(U_i)$ und $(s_i)_{i\in I}$ eine konsistente Familie. Ist $s := (s_V)_{V\subseteq U, V\in\mathcal{B}}$ ein Amalgam zu der konsistenten Familie

[1] d. h. alle offenen $U \subseteq X$ lassen sich als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ schreiben

$(s_i)_{i\in I}$, so muss für alle $V \subseteq U_i$, $V \in \mathcal{B}$ wegen $\rho_V^{U_i}(s) = s_i$ die Gleichheit $s_V = s_{i,V}$ gelten. Da die Familie konsistent ist, gilt $(s_{i,V})_{V\subseteq U_i\cap U_j, V\in\mathcal{B}} = \rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(s_i) = \rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(s_j) = (s_{j,V})_{V\subseteq U_i\cap U_j, V\in\mathcal{B}}$ und s_V ist auch für $V \in U_i \cap U_j$ wohldefiniert.

Sei nun $V \subseteq U$, $V \in \mathcal{B}$ beliebig. Dann sind die $(s_{V'})_{V'\subseteq V\cap U_i, V'\in\mathcal{B}}$ bereits alle definiert und stimmen auf den Schnitten $U_i \cap U_j$ überein. Da $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie ist, ist $V = \bigcup\limits_{i\in I} \bigcup\limits_{V'\subseteq V\cap U_i, V'\in\mathcal{B}} V'$ und nach der $\mathcal{B}$-Garbeneigenschaft gibt es dann genau ein $s_V \in \mathcal{F}'(V) \cong \mathcal{F}(V)$ mit $\rho^V_{V'}(s_V) = s_{V'}$ für alle $i \in I$, $V' \subseteq V \cap U_i$, $V' \in \mathcal{B}$. Folglich existiert das Amalgam s und da wir bei der Konstruktion keine Wahl zu treffen hatten, ist es auch eindeutig.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ bis auf Isomorphie eindeutig ist. Dafür verwenden wir den Aufgabenteil b):

Sei also $\mathcal{G}$ eine weitere Garbe von Mengen auf X, mit $\mathcal{G}(V) = \mathcal{F}'(V) = \mathcal{F}(V)$ für alle $V \in \mathcal{B}$. Auf den Basismengen V der Topologie sind also $\mathrm{id}(V)\colon\ \mathcal{F}(V) \to \mathcal{G}(V)$ und $\mathrm{id}(V)\colon\ \mathcal{G}(V) \to \mathcal{F}(V)$ wohldefinierte Abbildungen, die mit den Restriktionen kommutieren. Nach b) existieren dann genau ein Garbenmorphismus $\varphi\colon\ \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ und ein Garbenmorphismus $\varphi'\colon\ \mathcal{G} \to \mathcal{F}$, der id fortsetzt.

Weiterhin ist $\varphi' \circ \varphi(V) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(V)}$ und, wiederum nach b), gibt es genau einen Garbenmorphismus von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{F}$, der diese fortsetzt. Da sowohl der Identitätsfunktor $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}$, als auch $\varphi' \circ \varphi$ solche eine Fortsetzung sind, gilt $\varphi' \circ \varphi \cong \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$. Genauso zeigt man $\varphi \circ \varphi' \cong \mathrm{id}_G$ und hat damit bewiesen, dass $\mathcal{G} \cong \mathcal{F}$ ist.

b) Seien also $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei Garben und für alle $V \in \mathcal{B}$ eine Abbildung $\varphi(V)\colon\ \mathcal{F}(V) \to \mathcal{G}(V)$ gegeben, so dass die $\varphi(V)$ mit den Restriktionsabbildungen kommutieren. Sei nun $U \in \mathrm{Off}(X)$ beliebig. Da $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie auf X ist, gilt $U = \bigcup\limits_{V\subseteq U, V\in\mathcal{B}} V$.

Damit ist $\varphi(U)$ bereits eindeutig bestimmt:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "\rho^U_V"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho^U_V"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"'] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

Sei $f \in \mathcal{F}(U)$. Für alle $V \subseteq U$, $V \in \mathcal{B}$ sind die Schnitte $\rho^U_V(\varphi(U)(f)) = \varphi(V)(\rho^U_V(f)) \in \mathcal{G}(V)$ festgelegt und bilden eine konsistente Familie in $\mathcal{G}$. Da $\mathcal{G}$ eine Garbe ist, ist $\varphi(U)(f) \in \mathcal{G}(U)$ damit eindeutig bestimmt.

Ist $U' \subseteq U \subseteq X$ offen, dann ist jedes $V \subseteq U'$, $V \in \mathcal{B}$ auch in U enthalten. Es gilt $\rho^{U'}_V(\rho^U_{U'}(\varphi(U)(f))) = \rho^U_V(\varphi(U)(f)) = \varphi(V)(\rho^U_V(f))$, also ist $\rho^U_{U'}(\varphi(U)(f))$ ein Amalgam für die $\varphi(V)(\rho^U_V(f))$ und es gilt $\rho^U_{U'}(\varphi(U)(f)) = \varphi(U')(\rho^U_{U'}(f))$.

c) Hier muss man sich klar machen, dass $\mathcal{F}(U)$ eine (abelsche) Gruppe/ein Ring/ein R-Modul ist, falls die $\mathcal{F}'(V)$ es sind und dass die Restriktionsabbildungen in der entsprechenden Kategorie liegen. Auch in b) muss gezeigt werden, dass die $\varphi(U)$ Morphismen aus der richtigen Kategorie sind.

Anmerkung: Natürlich hätte man bei dieser Aufgabe alles noch ein wenig kategorieller formulieren können und vor allem die UAE des inversen Limes mit ins Spiel bringen.