Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

2. Mai 2012

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Geometrie der Schemata – Übungsblatt 2

Die Übung vom 8. Mai wird auf den 7. Mai, 14 Uhr, vorverlegt. Sie findet im Seminarraum im 1. OG in der Kronenstraße 32 statt. In den Raum kommt man - sobald ich dort bin - mit Hilfe der Türklingel.

Auf diesem Blatt bezeichne R immer einen kommutativen Ring mit Eins und k einen Körper.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Beweise die Proposition 1.14 aus der Vorlesung:

Sei $f\colon X \to Y$ stetig, $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X und $\mathcal{G}$ eine Garbe auf Y. Dann ist f^{-1} linksadjungiert zu f_* in der Kategorie der Garben, d. h. es gibt eine natürliche Bijektion

$$\operatorname{Hom}(f^{-1}\,\mathcal{G}, \mathcal{F}) \to \operatorname{Hom}(\mathcal{G}, f_*\,\mathcal{F})\,.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Zeige das folgende Lemma von Krull:

a) Sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System und $I \subseteq R$ ein Ideal, das disjunkt zu S ist. Dann gibt es ein Primideal $\wp \subseteq R$, das I enthält und ebenfalls zu S disjunkt ist.
b) Es gilt:

$$\bigcap_{\substack{\wp \text{ Primideal in } R \\ I \subseteq \wp}} \wp = \sqrt{I}\,.$$

Aufgabe 3 (2 Punkte)
Zeige:

a) Jede **abgeschlossene, nicht leere,** irreduzible Teilmenge von $\operatorname{Spec} R$ hat genau einen generischen Punkt.
b) Die irreduziblen Komponenten von $\operatorname{Spec} R$ entsprechen bijektiv den minimalen Primidealen in R.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Bestimme $\operatorname{Spec} R$ für folgende Ringe R:

a) $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) $R = k[X]/(X^2)$.

c) $R = k[X]_{(X)} = k[X]_S$ mit $S = k[X] \setminus (X)$.

d) $R = \mathbb{C}[A]$, die von $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ im Matrizenring $\mathbb{C}^{n\times n}$ erzeugte $\mathbb{C}$-Unteralgebra.
Hinweis: Hier kann die Lineare Algebra helfen.

Abgabe bis **Montag**, den 7. Mai 2012, zu Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.