Karlsruher Institut für Technologie
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

7. Mai 2012

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Geometrie der Schemata – Lösung zum Übungsblatt 2

Auf diesem Blatt bezeichne R immer einen kommutativen Ring mit Eins und k einen Körper.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Zeige das folgende Lemma von Krull:

a) Sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System und $I \subseteq R$ ein Ideal, das disjunkt zu S ist. Dann gibt es ein Primideal $\wp \subseteq R$, das I enthält und ebenfalls zu S disjunkt ist.

b) Es gilt:

$$\bigcap_{\substack{\wp \text{ Primideal in } R \\ I \subseteq \wp}} \wp = \sqrt{I}\,.$$

Lösung:

a) Betrachte den kanonischen Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to R_S$. Sei $I' = (\varphi(I))$ das von $\varphi(I)$ erzeugte Ideal in R_S, also $I' = \{\frac{f}{a} \in R_S \mid f \in I,\ a \in S\}$.

Zunächst überlegen wir uns, dass $I' \neq R_S$, also $1 \notin I'$. Denn wäre $1 \in I'$, dann gäbe es ein $f \in I$ und ein $a \in S$ mit $1 = \frac{f}{a}$ in R_S, d.h. es gäbe ein

$$s \in S \text{ mit } s(f - a) = 0.$$

Dann wäre $sf = sa$ sowohl in I als auch in S – ein Widerspruch zur Disjunktheit!

Somit ist I' ein echtes Ideal und damit in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}'$ enthalten. Dann ist $\mathfrak{p} := \varphi^{-1}(\mathfrak{m}')$ ein Primideal, enthält I und hat leeren Schnitt mit S, denn sonst wäre für $s \in S \cap \mathfrak{p}$ das Bild $\varphi(s) \in \mathfrak{m}'$ eine Einheit in R_S.

b) „$\supseteq$“ Ist $f \in \sqrt{I}$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n \in I$. Folglich gilt für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ mit $I \subseteq \mathfrak{p}$, dass $f^n \in \mathfrak{p}$, also auch $f \in \mathfrak{p}$.

„$\subseteq$“ Sei $a \in R \setminus \sqrt{I}$ und $S := \{a^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Dann ist S ein multiplikatives System und $I \cap S = \emptyset$. Nach a) gibt es dann ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \supseteq I$ und $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Damit liegt a nicht im Schnitt über alle Primideale, die I enthalten.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Bestimme $\operatorname{Spec} R$ für folgende Ringe R:

a) $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) $R = k[X]/(X^2)$.

c) $R = k[X]_{(X)} = k[X]_S$ mit $S = k[X] \setminus (X)$.

d) $R = \mathbb{C}[A]$, die von $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ im Matrizenring $\mathbb{C}^{n\times n}$ erzeugte $\mathbb{C}$-Unteralgebra.
Hinweis: Hier kann die Lineare Algebra helfen.

Lösung: Ist $I \subsetneq R$ ein Ideal und $\pi\colon R \twoheadrightarrow R/I$ die kanonische Projektion, dann ist $\operatorname{Spec}\pi\colon \operatorname{Spec} R/I \to \operatorname{Spec} R$ injektiv und $\operatorname{Bild}(\operatorname{Spec}\pi) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$.

b) Es gilt $\operatorname{Spec}(k[X]) = \{(0)\} \cup \{(f) \mid f \in k[X] \text{ irreduzibel}\}$.
Sei $R = k[X]/(X^2)$, $I := (X^2)$ und $\pi\colon k[X] \twoheadrightarrow k[X]/I$. Dann ist

$$\operatorname{Bild}(\operatorname{Spec}\pi) = \{(f) \in \operatorname{Spec} k[X]/(X^2) \mid f \in k[X] \text{ irreduzibel}, (X^2) \subseteq (f)\} = \{(X)\}$$

und somit $Y := \operatorname{Spec} R = \{(X)\}$ einelementig. Die Strukturgarbe ist dann offensichtlich:

$$\mathcal{O}_Y(Y) = R \overset{\rho^Y_\emptyset \text{ eindeutig}}{\longrightarrow} \{p\} = \mathcal{O}_Y(\emptyset)$$

c) Nun sei $R = k[X]_{(X)} = k[X]_S$ mit $S = k[X] \setminus (X)$. Der Ring ist als Teilring von $k(X)$ nullteilerfrei und somit ist (0) ein Primideal. Außerdem ist der Ring lokal, mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = R \setminus R^\times = (\frac{X}{1})$. Sei nun $\emptyset \neq \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ und $f \in \mathfrak{p}$. Dann schreiben wir $f = \frac{X^e}{1} \cdot \frac{a}{b}$ mit $a \in k[X], b \in k[X] \setminus (X), X \nmid a$. Dann ist $a \in S$ und $\frac{a}{b}$ somit offensichtlich invertierbar, also gilt $\frac{X^e}{1} \in \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ prim ist, ist $\frac{X}{1} \in \mathfrak{p}$ und wegen $\mathfrak{p} \subseteq (\frac{X}{1})$ folgt $\mathfrak{p} = (\frac{X}{1})$. Folglich besteht das Spektrum von R aus genau zwei Punkten: $Y := \operatorname{Spec} k[X]_{(X)} = \{(0), (\frac{X}{1})\}$. Die offenen Mengen sind $\emptyset, D(\frac{X}{1}) = \{(0)\}$ und Y. Auch hier ist die Strukturgarbe leicht anzugeben:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Y(Y) \arrow[r, phantom, "="] \arrow[dd, bend right=60, "!"'] & R \arrow[r, phantom, "="] & k[X]_{(X)} \arrow[dr, hook] & \\
\mathcal{O}_Y(D(\frac{X}{1})) \arrow[r, phantom, "="] & R_{\frac{X}{1}} \arrow[r, phantom, "="] & \mathrm{Quot}(k[X]) \arrow[r, phantom, "="] & k(X) \arrow[dll, "!"] \\
\mathcal{O}_Y(\emptyset) \arrow[r, phantom, "="] & \{p\} & &
\end{tikzcd}$$

d) Wir betrachten den Einsetzungshomomorphismus $\Psi_A : \mathbb{C}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[A]$. Der Kern von Ψ_A ist $(\mathfrak{m}_A)$, wobei $\mathfrak{m}_A = \prod_{i=1}^{e}(X - \lambda_i)^{r_i}$ das Minimalpolynom von A ist, mit den Eigenwerten λ_i von A. Nach dem Homomorphiesatz ist $\mathbb{C}[A] \cong \mathbb{C}[X]/(\mathfrak{m}_A)$. Unsere Vorüberlegungen liefern dann, genau wie in a) und b),

$$\operatorname{Bild}(\operatorname{Spec}\Psi_a) = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}\mathbb{C}[X] \mid (\mathfrak{m}_A) \subseteq \mathfrak{q}\} = \{(X - \lambda_i) \mid \lambda_i \text{ ist EW von } A\}$$

und somit $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[A] = \{(A - \lambda_i) \mid \lambda_i \text{ ist EW von } A\}$.